

ZUR THEORIE  
DER  
MECHANISCHEN REGISTRIERUNG.

---

Von  
Fürst B. Galitzin (Goliceyn).

2963

---

ST. PETERSBURG.  
BUCHDRUCKEREI DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.  
Wass. Ostr., 9 Linie, № 12.  
1912.

## Zur Theorie der mechanischen Registrierung.

VON FÜRST B. GALITZIN (GOLICYN).

Gedruckt auf Verfügung der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.  
Januar 1912. S. v. Oldenburg, Beständiger Secretär.

Die direkte mechanische Aufschreibung von Seismographenbewegungen auf berusstem Papier zeichnet sich durch ihre besondere Billigkeit und Übersichtlichkeit aus, sie besitzt aber den sehr erheblichen Nachteil, dass sie ein noch wenig untersuchtes und sehr veränderliches Störungselement, wie die Reibung des Schreibstiftes am berussten Papier, einführt. Infolgedessen muss in die Grunddifferentialgleichung der Bewegung des Seismographen selbst ein besonderes Korrektionsglied eingeführt werden, welches von dem Einflusse dieser Reibung Rechenschaft trägt und Reibungskonstante genannt wird. Unter Berücksichtigung dieser Korrektionsgrösse findet eine bessere Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung statt, es bestehen aber immer noch gewisse Abweichungen, welche unter Berücksichtigung nur einer und zudem noch konstanten Korrektionsgrösse nicht gehoben werden können und welche die rationelle Auswertung von Seismogrammen, zum Zweck der Bestimmung der Elemente der wahren Bodenbewegung, in sehr erheblicher Weise erschweren.

Die elementare Theorie der mechanischen Registrierungsart unter Berücksichtigung der Reibung (Wiechert, Orlov) ist wohl bekannt, der Übersichtlichkeit halber aber werde ich dieselbe hier kurz rekapitulieren.

Als Prototyp eines Seismographen werde ich ein Horizontalpendel nehmen, welches etwa zur Registrierung der NS-Komponente der wahren Bodenbewegung  $x$  eingerichtet ist, wobei  $x$  eine beliebige Funktion der Zeit  $t$  sein soll.

$$x = f(t).$$

Dann lautet bekanntlich die Grunddifferentialgleichung der Pendelbewegung, wie folgt:

$$y'' + 2\varepsilon y' + n^2(y + \varphi) + \frac{I}{l} x'' = 0 \dots\dots\dots (1)$$

Hierin bedeuten:

- $y$  — die Ablenkung des Schreibstiftes von seiner Ruhelage auf der Registriertrommel,
- $\varepsilon$  — eine Dämpfungskonstante,
- $\rho$  — die Reibungskonstante,
- $l$  — die reduzierte Pendellänge,
- $L$  — die Entfernung des Schreibstiftes von der Drehungsaxe des Pendels.
- $n$  — ist eine Konstante, welche von der Eigenperiode des Pendels ohne Dämpfung  $T$  in unmittelbarem Zusammenhang steht, und zwar ist

$$n = \frac{2\pi}{T} \dots \dots \dots (2)$$

Wenn der Seismograph mit einer Hebelvergrößerungseinrichtung versehen ist, so muss noch  $L$  mit dem Verhältnis des langen zum kurzen Hebelarm multipliziert werden.

Das Verhältnis  $\frac{L}{l}$ , welches wir mit  $\mathfrak{B}_0$  bezeichnen werden, heisst normales Vergrößerungsverhältnis für Schwingungen von unendlich kleiner Periode. Es stellt in diesem Fall das Verhältnis des Ausschlages am Seismographen zum Ausschlage der entsprechenden wahren Bodenbewegung dar.

Die Reibungskonstante  $\rho$  besitzt bekanntlich die Eigenschaft, ihr Vorzeichen zugleich mit  $y'$  zu ändern und zwar sind  $\rho$  und  $y'$  beide zugleich, entweder positiv, oder negativ.

Die Einführung der Reibungskonstante  $\rho$  in die Differentialgleichung der Pendelbewegung kann folgendermaassen gerechtfertigt werden.

Setzen wir  $x''$  gleich Null und lassen wir das Horizontalpendel seine Eigenschwingungen ausführen.

Wenn das Pendel zum Ruhestande kommt, so erreicht es infolge der Reibung nicht seine *normale* Ruhelage, welche es annehmen würde, wenn keine Reibung vorhanden wäre, und zwar, wenn das letzte  $y'$  negativ ist, so bleibt ein kleiner positiver Ausschlag übrig und umgekehrt.

Für den Ruhezustand ( $y'$  und  $y''$  gleich Null) ergibt sich aber aus der Gleichung (1)

$$y = -\rho,$$

was, wenn man auf das Vorzeichen von  $\rho$  Rücksicht nimmt, mit den Beobachtungen im Einklang steht.

Die Reibungskonstante  $\rho$  ist also nichts anderes, als der Restausschlag des Pendels selbst.

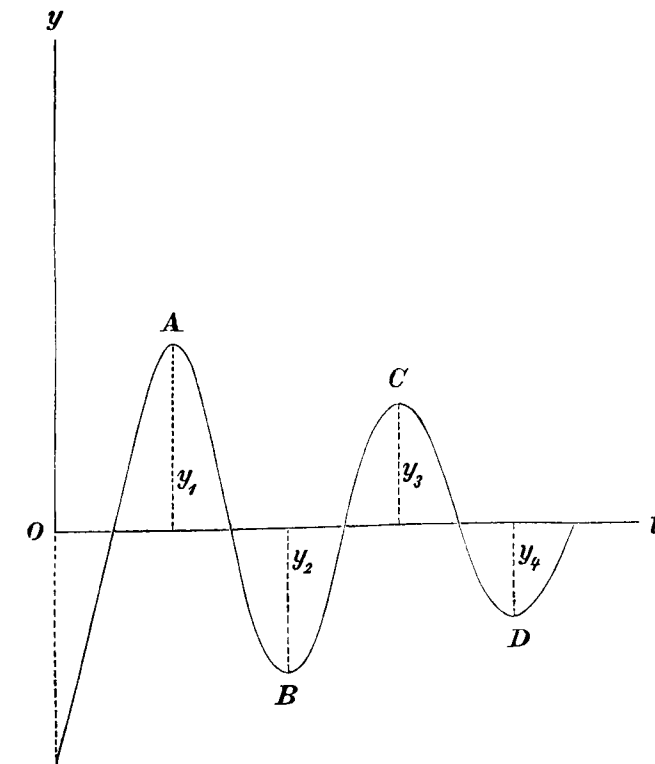
Wollen wir nun die Eigenbewegung des Pendels näher verfolgen.

Dementsprechend setzen wir in der allgemeinen Gleichung (1)  $x'' = 0$ .

Es sei ausserdem  $\varepsilon < n$ .

Wäre das Störungsglied  $\rho$  nicht vorhanden, so würde die Eigenbewegung des Horizontalpendels eine echte gedämpfte Sinusoide darstellen, wie diese auf der folgenden Fig. (1) wiedergegeben ist.

Fig. 1.



Das Verhältnis  $v$  der absoluten Werte (unabhängig vom Vorzeichen) irgend welcher zweier benachbarter maximaler Amplituden, wie z. B.  $y_k$  und  $y_{k+1}$ , wäre dann konstant. Also

$$v = \frac{y_k}{y_{k+1}} \dots \dots \dots (3)$$

Dieses Verhältnis heisst Dämpfungsverhältnis.

Führen wir noch folgende Bezeichnungen ein:

$$\gamma = +\sqrt{n^2 - \varepsilon^2} \dots \dots \dots (4)$$

$$h = \frac{1}{n} \dots \dots \dots (5)$$

$$\mu^2 = 1 - h^2 \dots \dots \dots (6)$$

und

$$m = \frac{\sqrt{1 - \mu^2}}{\mu} \dots \dots \dots (7)$$

so ergibt sich aus der bekannten Theorie des Horizontalpendels<sup>1)</sup> folgender Ausdruck für  $v$ :

$$v = e^{\pi m} \dots \dots \dots (8)$$

Die volle Eigenperiode des Pendels  $T'$  bei Anwesenheit der Dämpfung ergibt sich aus der Formel

$$T' = \frac{2\pi}{\gamma} \dots \dots \dots (9)$$

Die beiden Pendelkonstanten  $T$  und  $\epsilon$  werden durch die folgenden Formeln gegeben:

$$T = \frac{T'}{\sqrt{1 + 0,53720\Lambda^2}} \dots \dots \dots (10)$$

und

$$\epsilon = 4,6052 \frac{1}{T} \cdot \frac{\Lambda}{\sqrt{1 + 0,53720\Lambda^2}} \dots \dots \dots (11)$$

Hierin bedeutet  $\Lambda$  das gewöhnliche logarithmische Dekrement

$$\Lambda = \text{Log}_{10} v = 1,3644 m \dots \dots \dots (12)$$

Indem man  $T'$  und  $\Lambda$  aus den Beobachtungen entnimmt, lassen sich nach den Formeln (10) (resp. (2)) und (11) beide Pendelkonstanten  $n$  und  $\epsilon$ , folglich auch  $\mu^2$ , leicht bestimmen.

$\mu^2$  ist eine sehr maassgebende Konstante, die die Stärke der Dämpfung charakterisiert.

Ich habe dieselbe *Dämpfungskonstante* genannt. Ist das Pendel völlig ungedämpft, so wird  $\mu^2 = 1$ ; steht es aber auf der Grenze der Aperiodizität ( $\epsilon = n$ ), so wird  $\mu^2 = 0$  sein.

Aus den Formeln (2), (5), (6) und (11) ergibt sich folgender Ausdruck für  $\mu^2$ :

$$\mu^2 = \frac{1}{1 + 0,53720\Lambda^2} \dots \dots \dots (13)$$

<sup>1)</sup> Man vergleiche z. B. meinen Aufsatz: «Über ein neues aperiodisches Horizontalpendel mit galvanometrischer Fernregistrierung». Comptes rendus des séances de la Commission sismique permanente. T. IV. Livr. 1. § 2.

Setzen wir nun jetzt voraus, dass das Reibungsglied  $\rho$  in der Differentialgleichung (1) mitenthalten ist.

Dann wird das Verhältnis der absoluten Werte zweier benachbarter gemessener maximaler Amplituden der Kurve der Eigenbewegung des Pendels nicht mehr konstant, sondern von den Werten der Amplituden selber abhängig sein, das *wahre* Dämpfungsverhältnis  $v = e^{\pi m}$  lässt sich aber, wenn  $\rho$  bekannt ist, immer noch berechnen.

Dazu dient die Formel

$$v = \frac{y_k - \rho}{y_{k+1} + \rho} \dots \dots \dots (14)$$

In dieser Formel sind alle Amplituden, sowie  $\rho$  als *positiv* anzunehmen.

Wegen der Ableitung dieser Formel sei z. B. auf meinen Aufsatz «Über ein neues schweres Horizontalpendel mit mechanischer Registrierung für seismische Stationen zweiten Ranges» verwiesen<sup>1)</sup>.

Bezeichnen wir durch  $v_k$  das Verhältnis zweier benachbarter maximaler Amplituden  $y_k$  und  $y_{k+1}$  der Kurve der Pendelbewegung, also

$$v_k = \frac{y_k}{y_{k+1}} \dots \dots \dots (15)$$

so sehen wir, dass  $v_k$  immer grösser als  $v$  wird und zwar wächst  $v_k$  mit der Abnahme von  $y_k$ .

Auf Grund der Formel (14) lässt sich das wahre Dämpfungsverhältnis  $v$  und die Reibungskonstante  $\rho$  aus der Kurve der Eigenbewegung des Pendels leicht bestimmen.

Setzen wir dazu voraus, dass drei nach einander folgende maximale Ordinaten  $y_k$ ,  $y_{k+1}$  und  $y_{k+2}$  ausgemessen worden sind.

Dann können wir auf Grund der Formel (14) schreiben

$$y_k - \rho = (y_{k+1} + \rho) v,$$

$$y_{k+1} - \rho = (y_{k+2} + \rho) v,$$

also

$$(y_k + y_{k+1}) - 2\rho = \{(y_{k+1} + y_{k+2}) + 2\rho\} v \dots \dots \dots (16)$$

Es ist immer zweckmässig die Summe der absoluten Werte benachbarter Ordinaten zu bilden, um von dem Einfluss der etwa unrichtigen Lage der angenommenen Nulllinie frei zu werden.

<sup>1)</sup> Comptes rendus des séances de la Commission sismique permanente. T. III. Livr. 3. § 3.

Um die Reibungskonstante  $\rho$  zu bestimmen, schaltet man die Dämpfung aus. Dann wird  $v$  sich wenig von der Einheit unterscheiden.

Setzen wir dementsprechend

$$v = 1 + \xi.$$

Dann ergibt sich aus der Gleichung (16), unter Vernachlässigung des Produktes zweier kleiner Grössen  $\rho$  und  $\xi$ , folgende Beziehung

$$(y_{k+1} + y_{k+2})\xi + 4\rho = (y_k - y_{k+2}) \dots \dots \dots (17)$$

Ist nun  $\xi$  so klein, dass es überhaupt vernachlässigt werden darf, dann ergibt sich annäherungsweise

$$\rho = \frac{1}{4} \{y_k - y_{k+2}\} \dots \dots \dots (18)$$

$\rho$  ist also in erster Annäherung gleich  $\frac{1}{4}$  der Differenz zweier benachbarter maximaler Ordinaten auf derselben Seite der Zeitaxe.

Um strenger zu verfahren, muss man sich schon der Gleichung (17) bedienen und  $\xi$  und  $\rho$  getrennt bestimmen. Dazu muss man aber eine vierte Ordinate zur Hilfe nehmen.

Setzen wir der Einfachheit halber

$$w_k = y_k + y_{k+1}, \dots \dots \dots (19)$$

so ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} w_{k+1} \cdot \xi + 4\rho &= y_k - y_{k+2} \\ w_{k+2} \cdot \xi + 4\rho &= y_{k+1} - y_{k+3} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (20)$$

Man kann auf Grund der Formel (18) oder der Beziehungen (20)  $\rho$  für verschiedene Teile der Kurve bestimmen, um zu sehen, inwieweit es sich konstant und unabhängig von der mittleren Amplitude verhält.

Wenn  $\rho$  einmal bekannt ist, so kann man die Dämpfung einschalten und zur Bestimmung von  $v$  übergehen.

Auf Grund der Beziehungen (16) und (19) ergibt sich

$$v = \frac{w_k - 2\rho}{w_{k+1} + 2\rho}, \dots \dots \dots (21)$$

woraus  $v$  sich berechnen lässt.

Man kann  $v$  ebenfalls für verschiedene Teile der Kurve bestimmen, um beurteilen zu können, inwieweit es konstant bleibt.

Die Gleichung (21) lässt sich aber in einer anderen Weise behandeln, worauf Orlov aufmerksam gemacht hat.

Es soll nun nicht allein  $v$ , sondern auch  $\rho$  aus der Kurve der Eigenbewegung des Pendels bei eingeschalteter Dämpfung ermittelt werden.

Dazu setzen wir

$$u = 2\rho(1 + v) \dots \dots \dots (22)$$

und fassen diese Grösse als eine neue Unbekannte auf.

Dann ergibt sich aus der Gleichung (21)

$$w_k = w_{k+1} \cdot v + u \dots \dots \dots (23)$$

Es soll nun eine Anzahl der Werte von  $w_k$  und  $w_{k+1}$  aus den Beobachtungen entnommen werden, wozu wir mehrere Male das Pendel die Kurve seiner Eigenbewegung aufschreiben lassen können.

Dann erhalten wir beispielsweise folgendes Gleichungssystem:

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= w_2 v + u \\ w_2 &= w_3 v + u \\ \dots &\dots \dots \\ w_s &= w_{s+1} v + u \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (24)$$

Wenn wir dazu mehrere Kurven verwenden, so werden in den benachbarten Gleichungen die einzelnen Werte von  $w_k$  sich nicht immer wiederholen.

Bilden wir nun das arithmetische Mittel dieser Gleichungen und setzen dementsprechend

$$w_m = \frac{w_1 + w_2 + \dots + w_s}{s}$$

$$w_{m_1} = \frac{w_2 + w_3 + \dots + w_{s+1}}{s}.$$

Dann wird

$$w_m = w_{m_1} v + u \dots \dots \dots (25)$$

Ziehen wir diese Gleichung von jeder der Gleichungen (24) ab, so ergibt sich folgendes Gleichungssystem, welches nur eine Unbekannte  $v$  enthält:

$$\left. \begin{aligned} (w_1 - w_m) &= (w_2 - w_{m_1}) v \\ (w_2 - w_m) &= (w_3 - w_{m_1}) v \\ \dots &\dots \dots \\ (w_s - w_m) &= (w_{s+1} - w_{m_1}) v \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (26)$$



Bezeichnen wir mit  $\theta'$  die Winkelgeschwindigkeit, d. h. den Zuwachs von  $\theta$  in einer Sekunde, oder, wenn nötig, in einer noch kleineren Zeiteinheit, so wird nach dem Verlauf einer Sekunde der Punkt  $A$  sich nach  $B$  verlegen, wobei  $AB = b\theta'$  wird.  $AB$  soll eine sehr kleine Grösse sein.

In derselben Zeit verlegt sich das berusste Papier um die Strecke  $BC = \lambda$ , von der Drehungsaxe  $O$  weg, nach links.  $\lambda$  ist nichts anderes, als die Länge einer Sekunde auf der Registriertrommel.

Also in einer Sekunde verlegt sich tatsächlich der Schreibstift auf dem berusteten Papier von  $A$  nach  $C$ . Die entsprechende lineare Geschwindigkeit  $AC$  wollen wir durch  $V$  bezeichnen.

$V$  lässt sich sofort aus dem elementaren Dreieck  $ABC$  berechnen.

Wegen der Kleinheit von  $AB$  können wir den Winkel  $ABC$  gleich  $90^\circ + \theta$  setzen.

Bezeichnen wir noch den Winkel  $BAC$  durch  $\psi$ , dann ergibt sich

$$V^2 = (b\theta')^2 + \lambda^2 + 2b\theta'\lambda \sin \theta \dots\dots\dots (29)$$

und

$$\sin \psi = \frac{\lambda}{V} \cos \theta.$$

Aus dieser letzten Gleichung folgt

$$\cos \psi = \frac{1}{V} \sqrt{V^2 - \lambda^2 \cos^2 \theta}.$$

Setzen wir hierin den Wert von  $V^2$  aus der Formel (29) ein, so ergibt sich

$$\cos \psi = \frac{1}{V} [b\theta' + \lambda \sin \theta] \dots\dots\dots (30)$$

Wenn die Registriertrommel, beispielsweise, in der entgegengesetzten Richtung sich drehen würde, so müsste man in den früheren Formeln, statt  $+\lambda$ ,  $-\lambda$  einsetzen.

Die hemmende Kraft  $f$  der Reibung des Schreibstiftes am berusteten Papier ist von  $C$  nach  $A$  gerichtet. Sie strebt immer die Vermehrung von  $\theta$  zu verhindern; infolgedessen wird das Moment dieser Kraft in bezug auf die Drehungsaxe des Pendels immer negativ.

$f$  ist eine unbekannte Funktion der Geschwindigkeit  $V$ . Wir können sie aber näherungsweise nach dem Maclaurin'schen Satz in eine Reihe entwickeln und durch folgende Formel darstellen

$$f = f_0 + \alpha V + \beta V^2, \dots\dots\dots (31)$$

wo  $\alpha$  und  $\beta$  zwei konstante Koeffizienten bedeuten.

Die dritte Konstante  $f_0$  ist erfahrungsgemäss *nicht* gleich 0. Sie hängt, wie wir es weiter sehen werden, von der Reibungskonstante  $\rho$  unmittelbar ab.

Das Moment  $\mathfrak{M}_0$  dieser Kraft in bezug auf die Drehungsaxe  $O$  wird gleich

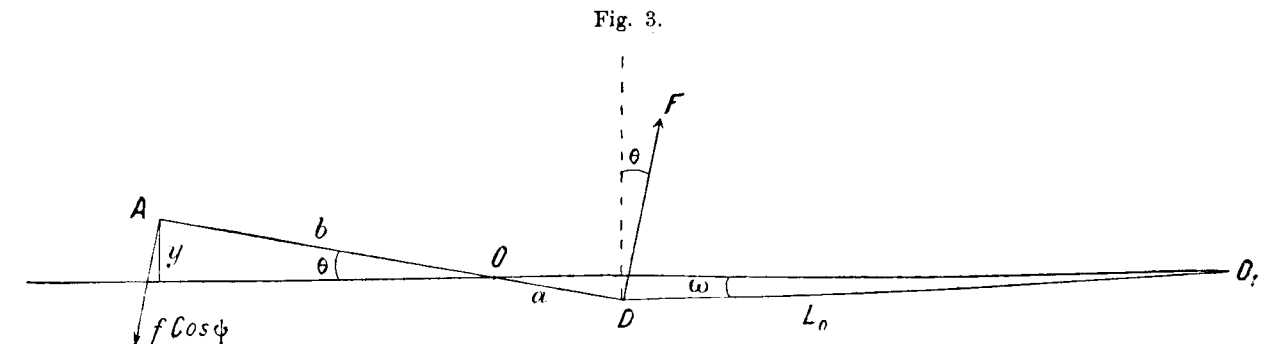
$$f \cos \psi b.$$

Setzen wir hierin die Werte von  $\cos \psi$  und  $f$  aus den Formeln (30) und (31) ein und beschränken uns nur auf kleine Werte von  $\theta$ , so ergibt sich

$$\mathfrak{M}_0 = \frac{b}{V} [b\theta' + \lambda \theta] [f_0 + \alpha V + \beta V^2] \dots\dots\dots (32)$$

Wollen wir nun das Moment  $\mathfrak{M}_1$  dieser Kraft  $f$  in bezug auf die Drehungsaxe des Pendels selbst aufsuchen.

Auf der folgenden Fig. 3 bedeutet  $O_1$  die Drehungsaxe des Pendels,  $O$  die Drehungsaxe der Vergrösserungsvorrichtung,  $O_1D = L_0$  die Länge des Pendelarms selbst,  $D$  den Punkt, wo das Ende des kürzeren Hebelarmes  $OD = a$  angreift, und  $A$  den Schreibstift.



Dem Winkel  $\theta$  entspricht eine Ablenkung  $\omega$  des Pendels selbst von seiner Ruhelage.

Das Moment  $\mathfrak{M}_0$  kann ersetzt werden durch das Moment einer Kraft  $F$ , welche in  $D$  angreift und senkrecht zu  $OD$  steht,

$$F = \frac{1}{a} \mathfrak{M}_0.$$

Das Moment dieser Kraft in bezug auf die Drehungsaxe des Pendels wird gleich

$$F \cos (\theta + \omega) L_0$$

sein.

Infolge der Kleinheit von  $\theta$  und  $\omega$  können wir aber einfach setzen

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{L_0}{a} \cdot \mathfrak{M}_0.$$

Bringen wir hierin den Wert von  $\mathfrak{M}_0$  aus der Gleichung (32) ein und führen noch folgende Bezeichnungen ein:

$$\nu = \frac{\lambda}{b} \dots \dots \dots (33)$$

und

$$L = L_0 \frac{b}{a},$$

so ergibt sich, unter Berücksichtigung der Beziehung (28),

$$\mathfrak{M}_1 = L \frac{1}{V} [y' + \nu y] [f_0 + \alpha V + \beta V^2] \dots \dots \dots (34)$$

Dies ist der Ausdruck für das Moment der Reibungskräfte inbezug auf die Drehungsaxe des Pendels.

Wäre nun der Schreibstift gehoben, so liesse sich die Differentialgleichung der Pendelbewegung in folgender Form schreiben

$$K\omega'' = -P\omega - \mathfrak{M} \dots \dots \dots (35)$$

Hierin bedeuten:

$K$  — das Trägheitsmoment des Systems inbezug auf die Drehungsaxe des Pendels,

—  $P\omega$  — das Moment der Schwerkraft

und

—  $\mathfrak{M}$  — das Moment der übrigen dämpfenden Kräfte.

Diese beiden Momente sind negativ.

Nehmen wir, wie üblich, an, dass  $\mathfrak{M}$  proportional der Winkelgeschwindigkeit  $\omega'$  des Pendels ist, eine Bedingung, welche bei Anwendung der magnetischen Dämpfung streng erfüllt wird, und setzen wir

$$n^2 = \frac{P}{K},$$

so lässt sich die Gleichung (35) folgendermaassen schreiben

$$\omega'' + 2\varepsilon\omega' + n^2\omega = 0.$$

Hierin bedeutet  $\varepsilon$  eine bestimmte Dämpfungskonstante und

$$n = \frac{2\pi}{T},$$

wo  $T$  die Eigenperiode des Pendels ohne Dämpfung ist.

Bei Vorhandensein der Reibung am berussten Papier und unter Berücksichtigung des Einflusses der Bodenverschiebung  $x = f(t)$ , lässt sich die Differentialgleichung der Pendelbewegung folgendermaassen darstellen:

$$\omega'' + 2\varepsilon\omega' + n^2\omega + \frac{\mathfrak{M}_1}{K} + \frac{1}{l}x'' = 0,$$

wo  $l$  die reduzierte Pendellänge bedeutet.

Für kleine Werte von  $\theta$  und  $\omega$  ist

$$y = b\theta = \frac{b}{a} L_0 \omega = L\omega.$$

Multiplizieren wir die vorige Gleichung mit  $L$  und berücksichtigen dabei, dass  $\frac{L}{l}$  das normale Vergrösserungsverhältnis  $\mathfrak{B}_0$  bedeutet, so ergibt sich

$$y'' + 2\varepsilon y' + n^2 y + \frac{L}{K} \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{B}_0 x'' = 0 \dots \dots \dots (36)$$

Es erübrigt also nur den Wert von  $\mathfrak{M}_1$  auszubilden (siehe die Formel (34)).

Nun ergibt sich aus der Formel (29), unter Berücksichtigung der Beziehungen (28) und (33),

$$V = \sqrt{y'^2 + 2\nu y y' + b^2 \nu^2}.$$

Infolge der verhältnismässig sehr langsamen Drehgeschwindigkeit der Registriertrommel ist  $\nu$  eine sehr kleine Grösse, infolgedessen könnten wir eigentlich in dem vorigen Ausdruck für  $V$  das Glied  $b^2 \nu^2$  einfach vernachlässigen. Um desto mehr können wir es durch  $y^2 \nu^2$  ersetzen.

Dann wird

$$V = y' + \nu y \dots \dots \dots (37)$$

Dieser Ausdruck ist nicht vollkommen streng, speziell für sehr kleine Werte von  $y'$ , aber wegen der Kleinheit von  $\nu$  ist dies für das Endresultat der Rechnungen von keiner wesentlichen Bedeutung.



Setzen wir nun diesen Wert von  $V$  in die Formel (34) ein, so ergibt sich

$$\frac{L}{K} \mathfrak{M}_1 = \frac{L^2}{K} \cdot [f_0 + \alpha \{y' + \nu y\} + \beta \{y'^2 + 2\nu y y' + \nu^2 y^2\}].$$

Bringen wir diesen Ausdruck in die Gleichung (36) und führen noch folgende Bezeichnungen ein:

$$\left. \begin{aligned} 2\varepsilon_0 &= \alpha \frac{L^2}{K} \\ n_1^2 &= n^2 + 2\nu\varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon + \varepsilon_0 \\ \rho_0 &= \frac{1}{n_1^2} \cdot \frac{L^2}{K} f_0 \\ \xi &= \beta \frac{L^2}{K}, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

und

so lässt sich die Grunddifferentialgleichung der Pendelbewegung in folgender definitiver Form schreiben:

$$y'' + 2\varepsilon_1 y' + n_1^2 (y + \rho_0) + \xi \{y' + \nu y\}^2 + \mathfrak{B}_0 x'' = 0 \dots\dots (39)$$

Hierin bedeutet  $\varepsilon_1$  die resultierende, totale, Dämpfungskonstante.

Sie besteht aus zwei Teilen. Der erste Teil  $\varepsilon$  hängt von den übrigen dämpfenden Kräften und der zweite  $\varepsilon_0$  von der Reibung des Schreibstiftes ab.

Die neue Eigenperiode des Pendels

$$T_1 = \frac{2\pi}{n_1} = \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\nu\varepsilon_0}{n^2}}} \dots\dots\dots (40)$$

wird sich etwas von der entsprechenden Eigenperiode  $T = \frac{2\pi}{n}$  bei gehobenem Schreibstift unterscheiden, aber wegen der Kleinheit von  $\nu$  ist der Unterschied ganz und gar unbedeutend, um desto mehr, da  $T_1$  direkt aus Schwingungsbeobachtungen bei schwacher Dämpfung entnommen wird.

Trotzdem lässt sich der Unterschied zwischen  $T_1$  und  $T$  experimentell nachweisen, dazu muss man aber  $\lambda$ , resp.  $\nu$ , gross wählen.

Der entsprechende Versuch wurde in folgender Weise ausgeführt.

Dazu wählte ich das 110 Klgr. schwere Horizontalpendel, welches in meinem früher erwähnten Aufsatz beschrieben ist (l. c.), und liess es die Kurve seiner Eigenbewegung mechanisch aufschreiben und zwar auf zweierlei

Weise, bei gewöhnlicher und *entgegengesetzter* Drehungsrichtung der Registriertrommel. Dann wird in der Formel (40)  $\nu$  sein Vorzeichen ändern.

Die Länge einer Sekunde war dabei ziemlich gross gewählt, nämlich

$$\lambda = 5,880 \text{ m/m},$$

und da  $b = 314,0 \text{ m/m}$  war, so ergab sich

$$\nu = 0,0187.$$

Die Dämpfungskonstante  $\varepsilon_0$  für die Reibung allein ergab sich aus dem logarithmischen Dekrement bei eingeschaltetem und ausgeschaltetem Schreibstift. Im letzten Fall wurde die Pendelbewegung optisch verfolgt.

Es ergab sich im Mittel

$$\varepsilon_0 = 0,00775.$$

Die Eigenperiode  $T$  des Pendels war ungefähr gleich  $22,2$ , also

$$n = 0,2830.$$

Nun ergibt sich aus der Formel (40) für die Differenz  $\Delta T_1$  der Perioden bei entgegengesetzten Werten von  $\nu$

$$\Delta T_1 = T \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2\nu\varepsilon_0}{n^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\nu\varepsilon_0}{n^2}}} \right]$$

oder, mit genügender Annäherung,

$$\Delta T_1 = 2T \cdot \frac{\nu\varepsilon_0}{n^2},$$

oder noch

$$\Delta T_1 = \frac{\nu\varepsilon_0}{2\pi^2} \cdot T^3.$$

Setzen wir hierin die früher gegebenen Werte ein, so ergibt sich

$$\Delta T_1 = 0,080.$$

Als Mittelwerte für die direkt bestimmten Perioden ergaben sich:

$$\begin{aligned} \text{Im ersten Fall,} \quad \nu < 0, \quad T_1 &= 22,279 \\ \text{Im zweiten Fall,} \quad \nu > 0, \quad T_1 &= 22,191, \end{aligned}$$

also

$$\Delta T_1 = 0,088.$$

Der Unterschied mit dem aus der theoretischen Formel (40) bestimmten Wert von  $\Delta T_1$  beträgt also nur

$$0,008.$$

Die Richtigkeit der Formel (40) kann also als bewiesen betrachtet werden.

Wir sehen auch, dass der Einfluss der Drehgeschwindigkeit der Trommel auf die Pendelperiode jedenfalls eine ganz minimale ist.

Wollen wir nun die Eigenbewegung des Pendels unter Berücksichtigung der *zwei* Reibungsglieder  $\rho_0$  und  $\xi$  etwas näher untersuchen, um den Ausdruck für das *wahre* Dämpfungsverhältnis  $v = e^{\pi m}$  (siehe die Formel (8)) zu finden. Dazu setzen wir in der Gleichung (39)  $x'' = 0$ .

Dann wird

$$y'' + 2\varepsilon_1 y' + n_1^2 (y + \rho_0) + \xi \{y' + vy\}^2 = 0 \dots\dots\dots (41)$$

Nehmen wir nun an, dass  $\varepsilon_1 < n_1$  ist.

Dann wird die Kurve der Eigenbewegung des Pendels etwa die Form der der Fig. 1 annehmen, wo  $y_1, y_2, y_3, y_4$  u. s. w. einige auf einander folgende maximale Ordinaten der Kurve sind.

Wollen wir nun diese Kurve zwischen den Punkten  $A$  und  $B$  untersuchen.

Für den Anfangsmoment der Zeitzählung wollen wir die Abszisse des Punktes  $A$  nehmen.

Dann wird für  $t = 0$

$$y = y_1$$

und

$$y' = 0.$$

Die Differentialgleichung (41) lässt sich nicht direkt integrieren, aber wegen der Kleinheit von  $\xi$  können wir das entsprechende Integral durch sukzessive Annäherungen finden.

Setzen wir dementsprechend zuerst  $\xi = 0$ .

Dann lautet das Integral der Gleichung (41), unter Berücksichtigung der gegebenen Anfangsbedingungen, wie folgt,

$$y + \rho_0 = (y_1 + \rho_0) e^{-\varepsilon_1 t} \left[ \cos \gamma_1 t + \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} \sin \gamma_1 t \right], \dots\dots\dots (42)$$

wo

$$\gamma_1 = \sqrt{n_1^2 - \varepsilon_1^2} \dots\dots\dots (43)$$

bedeutet..

Aus der Formel (42) ergibt sich nun

$$y' + vy = (y_1 + \rho_0) e^{-\varepsilon_1 t} \left\{ \frac{v\varepsilon_1 - n_1^2}{\gamma_1} \sin \gamma_1 t + v \cos \gamma_1 t \right\} - v\rho_0.$$

Führen wir noch folgende Bezeichnungen ein:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(t) &= -(y' + vy)^2 \\ A &= -\frac{(v\varepsilon_1 - n_1^2)^2 - v^2 \gamma_1^2}{\gamma_1^2} \\ B &= -2v \frac{v\varepsilon_1 - n_1^2}{\gamma_1} \\ C &= 2v\rho_0 \frac{v\varepsilon_1 - n_1^2}{\gamma_1} \\ D &= 2v^2 \rho_0^2. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (44)$$

Dann wird

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= (y_1 + \rho_0)^2 e^{-2\varepsilon_1 t} [A \sin^2 \gamma_1 t + B \sin \gamma_1 t \cdot \cos \gamma_1 t - v^2] \\ &\quad + (y_1 + \rho_0) e^{-\varepsilon_1 t} [C \sin \gamma_1 t + D \cos \gamma_1 t] - v^2 \rho_0^2 \dots\dots\dots (45) \end{aligned}$$

und die Differentialgleichung der Pendelbewegung (41), wenn wir in derselben den Wert von  $(y' + vy)^2 = -\Phi(t)$  einsetzen, nimmt folgende Form an:

$$y'' + 2\varepsilon_1 y' + n_1^2 (y + \rho_0) = \xi \Phi(t) \dots\dots\dots (46)$$

Das Integral dieser Gleichung lässt sich schon in endlicher Form angeben.

Die bekannte Theorie der linearen Differentialgleichungen liefert für das allgemeine Integral der Gleichung (46) folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} (y + \rho_0) &= e^{-\varepsilon_1 t} [\Gamma_1 \cos \gamma_1 t + \Gamma_2 \sin \gamma_1 t] + \frac{\xi}{\gamma_1} e^{-\varepsilon_1 t} \left[ -\cos \gamma_1 t \int e^{\varepsilon_1 t} \sin \gamma_1 t \cdot \Phi(t) dt \right. \\ &\quad \left. + \sin \gamma_1 t \int e^{\varepsilon_1 t} \cos \gamma_1 t \cdot \Phi(t) dt \right]. \end{aligned}$$

$\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  sind zwei Integrationskonstanten.

Wollen wir der Einfachheit halber folgende Bezeichnungen einführen:

$$\gamma_1 t = u \dots\dots\dots (47)$$

und

$$\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} = -a \dots \dots \dots (48)$$

Dann wird

$$\varepsilon_1 t = -au$$

und

$$\Phi(t) = \Psi(u) = (y_1 + \rho_0)^2 e^{2au} [A \sin^2 u + B \sin u \cos u - v^2] \\ + (y_1 + \rho_0) e^{au} [C \sin u + D \cos u] - v^2 \rho_0^2.$$

Es sei ferner

$$S_1 = \int e^{-au} \sin u \Psi(u) du$$

$$S_2 = \int e^{-au} \cos u \Psi(u) du$$

und

$$\eta = \frac{\xi}{\gamma_1^2} e^{au} [-\cos u S_1 + \sin u S_2] \dots \dots \dots (49)$$

Dann ergibt sich

$$(y + \rho_0) = e^{au} [\Gamma_1 \cos u + \Gamma_2 \sin u] + \eta \dots \dots \dots (50)$$

Wollen wir nun den Ausdruck von  $\eta$  bilden.

Wenn wir  $\Psi(u)$  in den Ausdrücken für  $S_1$  und  $S_2$  einsetzen, so werden folgende Integrale auftreten:

$$P_1 = \int e^{au} \sin^2 u \cos u du$$

$$P_2 = \int e^{au} \cos^2 u \sin u du$$

$$P_3 = \int e^{au} \sin^3 u du$$

$$P_0 = \int e^{au} \sin u du$$

$$P_v = \int e^{-au} \sin u du$$

$$Q_1 = \int \sin u \cos u du$$

$$Q_2 = \int \sin^2 u du$$

$$Q_3 = \int \cos^2 u du$$

$$Q_0 = \int e^{au} \cos u du$$

$$Q_v = \int e^{-au} \cos u du$$

und es wird

$$S_1 = (y_1 + \rho_0)^2 \{AP_3 + BP_1 - v^2 P_0\} + (y_1 + \rho_0) \{CQ_2 + DQ_1\} - v^2 \rho_0^2 P_v$$

und

$$S_2 = (y_1 + \rho_0)^2 \{AP_1 + BP_2 - v^2 Q_0\} + (y_1 + \rho_0) \{CQ_1 + DQ_3\} - v^2 \rho_0^2 Q_v.$$

Bringen wir nun diese Ausdrücke in die Formel (49) ein, so bekommen wir

$$\eta = \frac{\xi}{\gamma_1^2} e^{au} [(y_1 + \rho_0)^2 \{A(P_1 \sin u - P_3 \cos u) + B(P_2 \sin u - P_1 \cos u) \\ + v^2(P_0 \cos u - Q_0 \sin u)\} + (y_1 + \rho_0) \{C(Q_1 \sin u - Q_2 \cos u) \\ + D(Q_3 \sin u - Q_1 \cos u)\} + v^2 \rho_0^2 \{P_v \cos u - Q_v \sin u\}] \dots \dots \dots (51)$$

Jetzt müssen wir nun die Ausdrücke der verschiedenen Funktionen ( $P_1 \sin u - P_3 \cos u$ ), ( $P_2 \sin u - P_1 \cos u$ ) u. s. w. bestimmen.

Die früher eingeführten unbestimmten Integrale haben, wie man sich leicht überzeugen kann, folgende Bedeutung:

$$P_1 = \frac{e^{au}}{(1+a^2)(9+a^2)} [3 \sin^3 u + \{2 \cos u + \sin^2 u \cos u\} a \\ + \{-2 \sin u + 3 \sin^3 u\} a^2 + \sin^2 u \cos u \cdot a^3]$$

$$P_2 = \frac{e^{au}}{(1+a^2)(9+a^2)} [-3 \cos^3 u + \{2 \sin u + \sin u \cos^2 u\} a \\ + \{2 \cos u - 3 \cos^3 u\} a^2 + \sin u \cos^2 u \cdot a^3]$$

$$P_3 = \frac{e^{au}}{(1+a^2)(9+a^2)} [\{-3 \sin^2 u \cos u - 6 \cos u\} + \{\sin^3 u + 6 \sin u\} a \\ - 3 \sin^2 u \cos u \cdot a^2 + \sin^3 u \cdot a^3]$$

$$P_0 = \frac{e^{au}}{1+a^2} [-\cos u + \sin u \cdot a]$$

$$P_v = \frac{e^{-au}}{1+a^2} [-\cos u - \sin u \cdot a]$$

$$Q_1 = \frac{1}{2} \sin^2 u$$

$$Q_2 = \frac{1}{2} u - \frac{1}{2} \sin u \cos u$$

$$Q_3 = \frac{1}{2} u + \frac{1}{2} \sin u \cos u$$

$$Q_0 = \frac{e^{au}}{1+a^2} [\sin u + \cos u \cdot a]$$

$$Q_v = \frac{e^{-au}}{1+a^2} [\sin u - \cos u \cdot a].$$

Setzen wir nun

$$P_1 \sin u - P_3 \cos u = \frac{e^{au}}{(1+a^2)(9+a^2)} \chi(u) \dots\dots\dots (52)$$

und ordnen wir  $\chi(u)$  nach Potenzen von  $a$ , dann wird

$$\chi(u) = \chi_0(u) + \chi_1(u)a + \chi_2(u)a^2 \dots\dots\dots (53)$$

Der Koeffizient bei  $a^3$  ist gleich Null und für die hier auftretenden Funktionen findet man ohne Schwierigkeit, auf Grund der eben angeführten Integralformeln, folgende Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} \chi_0(u) &= 3(1 + \cos^2 u) \\ \chi_1(u) &= -4 \sin u \cos u \\ \chi_2(u) &= \sin^2 u. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (54)$$

Setzen wir weiter

$$P_2 \sin u - P_1 \cos u = \frac{e^{au}}{(1+a^2)(9+a^2)} \Omega(u) \dots\dots\dots (55)$$

und

$$\Omega(u) = \omega_0(u) + \omega_1(u)a + \omega_2(u)a^2 \dots\dots\dots (56)$$

Dann wird

$$\left. \begin{aligned} \omega_0(u) &= -3 \sin u \cos u \\ \omega_1(u) &= 2(\sin^2 u - \cos^2 u) \\ \omega_2(u) &= \sin u \cos u. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (57)$$

Weiter ergibt sich ohne Schwierigkeit

$$P_0 \cos u - Q_0 \sin u = -\frac{e^{au}}{1+a^2}$$

$$Q_1 \sin u - Q_2 \cos u = \varphi(u) = \frac{1}{2} [\sin u - u \cos u] \dots\dots\dots (58)$$

$$Q_3 \sin u - Q_1 \cos u = \psi(u) = \frac{1}{2} u \sin u \dots\dots\dots (59)$$

und

$$P_v \cos u - Q_v \sin u = -\frac{e^{-au}}{1+a^2}.$$

Bringen wir alle diese Ausdrücke in die Formel (51) ein, so erhalten

wir schliesslich den Ausdruck:

$$\begin{aligned} \gamma = \frac{\xi}{\gamma_1^2} \left[ (y_1 + \rho_0)^2 \frac{e^{2au}}{(1+a^2)(9+a^2)} \{ A \chi(u) + B \Omega(u) - (9+a^2) \gamma^2 \} \right. \\ \left. + (y_1 + \rho_0) e^{au} \{ C \varphi(u) + D \psi(u) \} - \frac{1}{1+a^2} \gamma^2 \rho_0^2 \right] \dots\dots (60) \end{aligned}$$

Wenn nun  $\eta$  einmal bestimmt ist, so können wir es in die Gleichung (50) einsetzen und zur Bestimmung der Konstanten  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  übergehen.

Die Anfangsbedingungen der Bewegung sind die folgenden.

Für

$$t = 0 \quad \text{oder} \quad u = 0$$

ist

$$y = y_1$$

und

$$\frac{dy}{dt} = \gamma_1 \frac{dy}{du} = 0.$$

Nach der Gleichung (50) wird nun

$$\frac{dy}{du} = e^{au} [(a\Gamma_1 + \Gamma_2) \cos u + (a\Gamma_2 - \Gamma_1) \sin u] + \frac{d\eta}{du};$$

folglich ergeben sich für die Bestimmung von  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  folgende zwei Gleichungen:

$$y_1 + \rho_0 = \Gamma_1 + (\eta)_{u=0} \dots\dots\dots (61)$$

und

$$0 = a\Gamma_1 + \Gamma_2 + \left( \frac{d\eta}{du} \right)_{u=0} \dots\dots\dots (62)$$

Aus der Formel (60) ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{du} = \frac{\xi}{\gamma_1^2} \left[ (y_1 + \rho_0)^2 \frac{e^{2au}}{(1+a^2)(9+a^2)} \{ A(2a\chi(u) + \chi'(u)) + B(2a\Omega(u) + \Omega'(u)) \right. \\ \left. - 2a(9+a^2)\gamma^2 \} + (y_1 + \rho_0) e^{au} \{ C(a\varphi(u) + \varphi'(u)) + D(a\psi(u) + \psi'(u)) \} \right] \dots (63) \end{aligned}$$

Auf Grund der Beziehungen (53), (54), (56), (57), (58) und (59) findet man ohne Schwierigkeit

$$\chi'(u) = -6 \sin u \cos u - 4(\cos^2 u - \sin^2 u)a + 2 \sin u \cos u \cdot a^2$$

$$\Omega'(u) = -3(\cos^2 u - \sin^2 u) + 8 \sin u \cos u \cdot a + (\cos^2 u - \sin^2 u)a^2$$

$$\varphi'(u) = \frac{1}{2} u \sin u$$

$$\psi'(u) = \frac{1}{2} [u \cos u + \sin u],$$

also für  $u = 0$

$$\begin{aligned}\chi(0) &= 6 & \chi'(0) &= -4a \\ \Omega(0) &= -2a & \Omega'(0) &= -3 + a^2 \\ \varphi(0) &= 0 & \varphi'(0) &= 0 \\ \psi(0) &= 0 & \psi'(0) &= 0.\end{aligned}$$

Folglich erhält man auf Grund der Beziehungen (60) und (63)

$$(\eta)_{u=0} = \frac{\xi}{\gamma_1^2} \left[ (y_1 + \rho_0)^2 \frac{1}{(1+a^2)(9+a^2)} \{6A - 2aB - (9+a^2)\nu^2\} - \frac{1}{1+a^2} \nu^2 \rho_0^2 \right]$$

und

$$\left(\frac{d\eta}{du}\right)_{u=0} = \frac{\xi}{\gamma_1^2} (y_1 + \rho_0)^2 \frac{1}{(1+a^2)(9+a^2)} \{8aA - 3(1+a^2)B - 2a(9+a^2)\nu^2\}.$$

Wollen wir jetzt noch folgende Bezeichnungen einführen:

$$\left. \begin{aligned}\sigma &= \frac{(y_1 + \rho_0)^2}{(1+a^2)(9+a^2)} \\ A_1 &= 6A - 2aB - (9+a^2)\nu^2 \\ B_1 &= 8aA - 3(1+a^2)B - 2a(9+a^2)\nu^2 \\ \nu_1^2 &= \frac{1}{1+a^2} \nu^2 \rho_0^2.\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (64)$$

Dann wird

$$(\eta)_{u=0} = \frac{\xi}{\gamma_1^2} \{\sigma A_1 - \nu_1^2\}$$

$$\left(\frac{d\eta}{du}\right)_{u=0} = \frac{\xi}{\gamma_1^2} \sigma B_1.$$

Setzen wir nun diese Werte in die Gleichungen (61) und (62) ein, so ergibt sich

$$\Gamma_1 = (y_1 + \rho_0) - \frac{\xi}{\gamma_1^2} (\sigma A_1 - \nu_1^2) \dots\dots\dots (65)$$

$$\Gamma_2 = -a(y_1 + \rho_0) + \frac{\xi}{\gamma_1^2} (\sigma a A_1 - a \nu_1^2 - \sigma B_1).$$

Da nun  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  bereits gefunden sind, kehren wir zu der Gleichung (50) zurück und wollen wir den Wert der zweiten maximalen Ordinate  $y_2$  aufsuchen.

Dazu müssen wir zuerst die Wurzel  $u_0$  der folgenden Gleichung

$$e^{au} [(a\Gamma_1 + \Gamma_2) \cos u + (a\Gamma_2 - \Gamma_1) \sin u] + \frac{d\eta}{du} = 0$$

bestimmen.

Mit Bezugnahme auf die Gleichung (62) können wir die vorige Gleichung folgendermaassen schreiben

$$\sin u = \frac{1}{a\Gamma_2 - \Gamma_1} \left[ \left(\frac{d\eta}{du}\right)_{u=0} \cos u - e^{-au} \frac{d\eta}{du} \right].$$

Das auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Glied enthält als Faktor  $\xi$ , folglich können wir setzen

$$\sin u = \xi F(u).$$

Die betreffende angenäherte Wurzel dieser Gleichung ist  $\pi$ ; folglich können wir schreiben

$$u_0 = \pi + \delta\xi, \dots\dots\dots (66)$$

wo  $\delta$  eine gewisse Konstante bedeutet, um deren Bestimmung wir uns, wie wir sofort sehen werden, gar nicht zu kümmern haben.

In der Tat, wenn wir diesen Wert von  $u_0$  aus der Formel (66) in die Gleichung (50) einsetzen, so ergibt sich

$$\begin{aligned}(y_2 + \rho_0) &= e^{a(\pi + \delta\xi)} [\Gamma_1 \cos(\pi + \delta\xi) + \Gamma_2 \sin(\pi + \delta\xi)] + (\eta)_{u=\pi} \\ &= e^{a\pi} (1 + a\delta\xi) [-\Gamma_1 - \Gamma_2 \delta\xi] + (\eta)_{u=\pi} \\ &= e^{a\pi} [-\Gamma_1 - \delta\xi(\Gamma_2 + a\Gamma_1)] + (\eta)_{u=\pi}.\end{aligned}$$

Nun enthält nach der Formel (62) der Ausdruck für  $\Gamma_2 + a\Gamma_1$  als Faktor  $\xi$ , folglich wird, unter Vernachlässigung der Glieder von der Ordnung  $\xi^2$ , einfach

$$(y_2 + \rho_0) = -\Gamma_1 e^{a\pi} + (\eta)_{u=\pi} \dots\dots\dots (67)$$

Es erübrigt also nur  $(\eta)_{u=\pi}$  zu bestimmen.

Auf Grund der vorigen Beziehungen findet man

$$\begin{aligned}\chi(\pi) &= 6 \\ \Omega(\pi) &= -2a \\ \varphi(\pi) &= \frac{1}{2} \pi \\ \psi(\pi) &= 0.\end{aligned}$$

Folglich ergibt sich aus der Gleichung (60), unter Berücksichtigung der Beziehungen (64),

$$(\eta)_{u=\pi} = \frac{\xi}{\gamma_1^2} \left[ \sigma A_1 e^{2a\pi} + \frac{1}{2} \pi C (y_1 + \rho_0) e^{a\pi} - \nu_1^2 \right].$$

Setzen wir nun diesen Ausdruck für  $(\eta)_{u=\pi}$  und den Wert von  $\Gamma_1$  aus der Formel (65) in die Gleichung (67) ein.

Dann erhalten wir

$$(y_2 + \rho) = - (y_1 + \rho_0) e^{a\pi} + \frac{\xi}{\gamma_1^2} \left[ \sigma A_1 e^{2a\pi} + \left\{ \frac{1}{2} \pi C (y_1 + \rho_0) + \sigma A_1 - \nu_1^2 \right\} e^{a\pi} - \nu_1^2 \right] \dots \dots \dots (68)$$

Das negative Vorzeichen vor dem ersten Gliede auf der rechten Seite der vorigen Gleichung bedeutet, dass die zweite Ordinate  $y_2$  negativ wird, was auch sein muss, da nach der Fig. 1 der zweite Kurvenscheitel  $B$  unter der Zeitaxe liegt.

Wollen wir aber, wie üblich, alle ausgemessenen Ordinaten als *positive* Grössen auffassen; dann müssen wir in die vorige Gleichung  $-y_2$ , statt  $y_2$ , einsetzen.

Andererseits wissen wir aus der elementaren Theorie, dass zwischen den Punkten  $A$  und  $B$  der Kurve, wo  $y' < 0$  ist,  $\rho_0$  negativ wird.

Setzen wir dementsprechend

$$\rho = -\rho_0;$$

dann wird die vorige Gleichung (68) folgende Form annehmen:

$$y_2 + \rho = (y_1 - \rho) e^{a\pi} - \frac{\xi}{\gamma_1^2} \left[ \sigma A_1 e^{2a\pi} + \left\{ \frac{1}{2} \pi C (y_1 - \rho) + \sigma A_1 - \nu_1^2 \right\} e^{a\pi} - \nu_1^2 \right] \dots \dots \dots (69)$$

In dieser Formel sind  $y_1$ ,  $y_2$  und  $\rho$  als positive Grössen aufzufassen.

In diesem allgemeinen Ausdruck für  $(y_2 + \rho)$  wollen wir nun gewisse Vereinfachungen treffen, nämlich die Glieder von der Ordnung  $\rho\xi$  und  $\rho^2$  vernachlässigen.

Nach der vierten der Formeln (44) ist  $C$  proportional zu  $\rho_0$  und nach der vierten der Formeln (64)  $\nu_1^2$  proportional zu  $\rho_0^2$ .

Folglich ergibt sich aus der Gleichung (69), mit Bezugnahme auf die erste der Beziehungen (64),

$$(y_2 + \rho) = (y_1 - \rho) e^{a\pi} - \frac{\xi}{\gamma_1^2} \cdot \frac{y_1^2}{(1+a^2)(9+a^2)} A_1 \{ e^{2a\pi} + e^{a\pi} \} \dots (70)$$

Nach der Beziehung (48) ist

$$e^{a\pi} = e^{-\frac{\epsilon_1}{\gamma_1} \pi}.$$

Nun erhält man aus den Formeln (4), (5) und (6)

$$\frac{\epsilon_1}{\gamma_1} = \frac{\sqrt{1-\mu_1^2}}{\mu_1};$$

folglich wird nach den Formeln (7) und (8)

$$e^{a\pi} = \frac{1}{v},$$

wo  $v$  das *wahre* gesuchte Dämpfungsverhältnis bedeutet.

Setzen wir noch zur Vereinfachung

$$\mathfrak{A} = \frac{A_1}{\gamma_1^2 (1+a^2)(9+a^2)}, \dots \dots \dots (71)$$

dann lässt sich die Gleichung (70) folgendermaassen schreiben:

$$1 = \frac{y_1}{y_2} \cdot \frac{1 - \frac{\rho}{y_1}}{1 + \frac{\rho}{y_2}} \cdot \frac{1}{v} - \xi \mathfrak{A} \frac{y_1^2}{y_2 \left( 1 + \frac{\rho}{y_2} \right)} \left[ \frac{1}{v^2} + \frac{1}{v} \right].$$

$\rho$  ist erfahrungsgemäss immer eine sehr kleine Grösse, folglich, können wir, wenn wir den Fall sehr kleiner Amplituden  $y_k$  ausschliessen (etwa  $y_k < 4 \text{ m/m}$ ), die vorige Gleichung, unter Vernachlässigung der Glieder von der Ordnung  $\rho^2$  und  $\xi\rho$ , in folgender Form schreiben:

$$1 = \frac{y_1}{y_2} \left\{ 1 - \rho \left( \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} \right) \right\} \frac{1}{v} - \xi \mathfrak{A} \frac{y_1^2}{y_2} \left[ \frac{1}{v^2} + \frac{1}{v} \right] \dots \dots \dots (72)$$

Führen wir, wie früher (siehe die Formel (15)), für ein beliebiges Paar benachbarter Amplituden, wie  $y_k$  und  $y_{k+1}$ , folgende Bezeichnung ein

$$v_k = \frac{y_k}{y_{k+1}},$$

so ist  $v_k$  das betreffende *scheinbare* Dämpfungsverhältnis, welches eine variable Grösse ist.

Nach dieser Bezeichnung ist

$$v_1 = \frac{y_1}{y_2}.$$

Setzen wir nun

$$p = v_1 \left\{ 1 - \frac{1}{y_1} (v_1 + 1) \rho \right\}$$

und

$$q = \xi \mathfrak{A} y_1 v_1,$$

o lässt sich die Gleichung (72) in folgender Weise schreiben:

$$v^2 - (p - q) v + q = 0.$$

Das gesuchte wahre Dämpfungsverhältnis wird also die Wurzel dieser quadratischen Gleichung sein.

Aus derselben ergibt sich, unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung und unter Berücksichtigung, dass für  $q = 0$   $v$  endlich bleiben soll,

$$v = p - \frac{1+p}{p} \cdot q.$$

Setzen wir hier die Werte von  $p$  und  $q$  ein so erhalten wir folgende definitive Formel

$$v + \frac{1}{y_1} v_1 (v_1 + 1) \rho + y_1 (v_1 + 1) \mathfrak{A} \xi = v_1 \dots \dots \dots (73)$$

Es ist evident, dass diese Gleichung für ein beliebiges Paar benachbarter maximaler Ordinaten ihre Gültigkeit behält, da wir bei der Ableitung der Gleichung (73) in ganz willkürlicher Weise die oberen Ordinaten der Kurve als positive und die unteren als negative Grössen aufgefasst haben.

Setzen wir also

$$\xi = \mathfrak{A} \xi \dots \dots \dots (74)$$

$$\left. \begin{aligned} b_k &= \frac{1}{y_k} v_k (v_k + 1) \\ c_k &= y_k (v_k + 1) \\ v_k &= \frac{y_k}{y_{k+1}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (75)$$

und

so können wir die Gleichung (73) in folgender verallgemeinerter Form schreiben:

$$v + b_k \rho + c_k \xi = v_k \dots \dots \dots (76)$$

Diese Gleichung bildet eben die Grundlage zur Bestimmung des wahren Dämpfungsverhältnisses  $v$  und der zwei Reibungskonstanten  $\rho$  und  $\xi$ .

Bei Verkleinerung von  $y_k$  nimmt der Koeffizient  $c_k$  ab und der Koeffizient  $b_k$  zu und, da erfahrungsgemäss  $\rho$  und  $\xi$  beide positive Grössen sind und, wie wir gleich sehen werden,  $\mathfrak{A}$  negativ ist, so wird bei Verkleinerung von  $y_k$  das scheinbare Dämpfungsverhältnis fortwährend zunehmen, was mit den Beobachtungen in Übereinstimmung steht.

Wäre  $\xi = 0$ , so würde

$$v + b_k \rho = v_k$$

sein.

Diese Gleichung ergibt sich unmittelbar für kleine Werte von  $\frac{\rho}{y_k}$  aus der elementaren Formel (14).

Es erübrigt also nur den Wert von  $\mathfrak{A}$  auszurechnen.

Setzen wir zu dem Zwecke den Wert von  $A_1$  aus der zweiten der Beziehungen (64) in die Formel (71) ein, so ergibt sich, unter Berücksichtigung der Beziehung (48),

$$\mathfrak{A} = \frac{\gamma_1^2}{(\gamma_1^2 + \varepsilon_1^2)(9\gamma_1^2 + \varepsilon_1^2)} \left[ 6A + 2 \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} B - \frac{1}{\gamma_1^2} (9\gamma_1^2 + \varepsilon_1^2) v^2 \right].$$

Setzen wir hierin die Werte von  $A$  und  $B$  aus den Formeln (44) ein und berücksichtigen noch dabei, dass nach der Formel (43)

$$\gamma_1^2 = n_1^2 - \varepsilon_1^2$$

und nach den Formeln (5) und (6)

$$\mu_1^2 = 1 - \frac{\varepsilon_1^2}{n_1^2},$$

also

$$\varepsilon_1 = \sqrt{1 - \mu_1^2} \cdot n_1$$

und

$$\gamma_1 = n_1 \mu_1$$

ist, so erhält man für  $\mathfrak{A}$ , wenn man den entsprechenden Ausdruck nach Potenzen von  $v$  ordnet,

$$\mathfrak{A} = - \frac{1}{1 + 8\mu_1^2} \left[ 6 - 16 \sqrt{1 - \mu_1^2} \frac{v}{n_1} + (11 - 8\mu_1^2) \frac{v^2}{n_1^2} \right].$$

Nun ist infolge der kleinen Drehgeschwindigkeit der Trommel  $v$  immer eine sehr kleine Grösse (siehe die Formel (33)) und da ausserdem  $\mathfrak{A}$  nur als Faktor bei  $\xi$  auftritt (siehe die Formel (74)), so können wir mit genügender Annäherung setzen

$$\mathfrak{A} = -\frac{6}{1 + 8\mu_1^2} \dots \dots \dots (77)$$

Wir sehen also, dass  $\mathfrak{A}$  in der Tat negativ ist.

Ist das Pendel völlig ungedämpft ( $\mu_1^2 = 1$ ), so wird

$$\mathfrak{A} = -\frac{2}{3}$$

sein.

Für die Grenze der Aperiodizität ( $\mu_1^2 = 0$ ) ist

$$\mathfrak{A} = -6.$$

Dies sind also die Grenzwerte für  $\mathfrak{A}$ .

Wollen wir nun sehen, wie die Gleichung (76) zu verwenden ist.

Um die Reibungskonstanten  $\rho$  und  $\xi$  zu bestimmen, schaltet man die Dämpfung aus und lässt das Pendel die Kurve seiner Eigenbewegung bei schwacher Dämpfung aufschreiben, wobei die Drehgeschwindigkeit der Registriertrommel *dieselbe* sein soll, wie bei den wirklichen seismometrischen Beobachtungen.

Daraus entnimmt man eine Anzahl maximaler Ordinaten  $y_1, y_2, y_3$  u. s. w. (absolute Werte).

Dann erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$\left. \begin{aligned} v + b_1 \rho + c_1 \xi &= v_1 \\ v + b_2 \rho + c_2 \xi &= v_2 \\ \dots \dots \dots \\ v + b_i \rho + c_i \xi &= v_i \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (78)$$

Bilden wir nun das arithmetische Mittel dieser Gleichungen und setzen dementsprechend

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_i}{i} \\ c_m &= \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_i}{i} \\ v_m &= \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_i}{i} \end{aligned}$$

Dann ergibt sich

$$v + b_m \rho + c_m \xi = v_m \dots \dots \dots (79)$$

Ziehen wir nun diese Gleichung von jeder der Gleichungen (78) ab, so bekommen wir folgende Gruppe von Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} (b_1 - b_m) \rho + (c_1 - c_m) \xi &= (v_1 - v_m) \\ (b_2 - b_m) \rho + (c_2 - c_m) \xi &= (v_2 - v_m) \\ \dots \dots \dots \\ (b_i - b_m) \rho + (c_i - c_m) \xi &= (v_i - v_m) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (80)$$

Es treten hier nur zwei Unbekannte  $\rho$  und  $\xi$  auf.

Dieses Gleichungssystem (80) lässt sich leicht nach der Methode der kleinsten Quadrate behandeln.

Daraus erhalten wir die gesuchten Werte der Unbekannten  $\rho$  und  $\xi$ .

Sind nun  $\rho$  und  $\xi$  bekannt, so ergibt sich sofort aus der Gleichung (79) der Wert von  $v$ .

Um die zweite Reibungskonstante  $\xi$  nach der Formel (74) zu bestimmen, müssen wir jetzt den Wert von  $\mathfrak{A}$  ausrechnen (siehe die Formel (77)).

Setzen wir, wie früher,

$$\Lambda = L g_{10} v,$$

so ergibt sich aus den Formeln (7) und (8)

$$v = e^{\pi \frac{\sqrt{1-\mu_1^2}}{\mu_1}}$$

und daraus

$$\mu_1^2 = \frac{\pi^2}{\pi^2 + (\lg v)^2} = \frac{1}{1 + \left( \frac{1}{\pi L g_{10} e} \right)^2 \Lambda^2}$$

oder

$$\mu_1^2 = \frac{1}{1 + 0,53720 \Lambda^2} \dots \dots \dots (81)$$

Nach dieser Formel lässt sich  $\mu_1^2$  ermitteln und folglich, nach der Formel (77),  $\mathfrak{A}$  berechnen.

Dann erhalten wir den Wert von

$$\xi = \frac{\xi}{\mathfrak{A}} \dots \dots \dots (82)$$



Zur Berechnung von  $\mu_1^2$  kann man sich sehr bequem der Tabelle IX meiner früher erwähnten «Seismometrische Tabellen» bedienen, wo die Werte von  $\text{Lg } \sqrt{1 + 0,53720 \Lambda^2}$  zusammengestellt sind.

Die Beobachtungen ergeben nun immer ein negatives  $\zeta$ , und, da  $\mathfrak{A}$  selbst negativ ist, so wird  $\xi$  immer positiv.

Wenn nun die beiden Reibungskonstanten  $\rho$  und  $\xi$  einmal bestimmt sind, so schalte man die Dämpfung ein und gehe zur Bestimmung des neuen wahren Dämpfungsverhältnisses  $v$  über. Bei Anwendung der mechanischen Registrierungsart wähle man  $v$  etwa gleich 4 oder 5.

Dazu lässt man das Pendel die Kurve seiner Eigenbewegung aufschreiben. In diesem Fall wird die Anzahl der Maximalordinaten  $y_k$  sehr gering sein.

Man entnimmt aus der Kurve den *angenäherten* Wert von  $v$  und bestimmt mit Hilfe desselben die entsprechenden Werte von  $\mathfrak{A}$  und  $\zeta$  ( $\xi$  ist jetzt als eine bekannte Grösse aufzufassen).

Dann wird in der Gleichung (76) nur eine einzige Unbekannte  $v$  auftreten, welche sich direkt ermitteln lässt.

Mit diesem neuen Wert von  $v$  kann man  $\mathfrak{A}$  nochmals bestimmen und die früheren Rechnungen wiederholen, dies wird aber im Allgemeinen überflüssig sein.

Auf diese Weise lässt sich das wahre definitive Dämpfungsverhältnis  $v$  sehr leicht bestimmen.

Wir haben bei Anwendung der Gleichung (76) implizite vorausgesetzt, dass alle maximalen Ordinaten  $y_k$  richtig ausgemessen sind, mit anderen Worten, dass wir die richtige Lage der Nulllinie kennen.

Um aber von der Lage der Nulllinie möglichst frei zu werden, ist es zweckmässig, bei Bestimmung von  $\rho$ ,  $\xi$  und  $v$  in etwas anderer Weise vorzugehen.

Setzen wir, wie früher (siehe Formel (19)),

$$w_k = y_k + y_{k+1},$$

dann wird  $w_k$  von der Lage der Nulllinie völlig unabhängig sein.

Auf Grund der Beziehungen (75) lässt sich nun die Gleichung (76) folgendermaassen schreiben:

$$y_{k+1} \cdot v + \frac{w_k}{y_{k+1}} \rho + y_k \cdot w_k \zeta = y_k.$$

In ganz ähnlicher Weise erhält man die Gleichung

$$y_{k+2} \cdot v + \frac{w_{k+1}}{y_{k+2}} \rho + y_{k+1} \cdot w_{k+1} \zeta = y_{k+1}.$$

Wollen wir nun diese beiden Gleichungen addieren und folgende Bezeichnungen einführen:

$$\left. \begin{aligned} B_k &= \frac{1}{w_{k+1}} \left\{ \frac{w_k}{y_{k+1}} + \frac{w_{k+1}}{y_{k+2}} \right\} \\ C_k &= \frac{1}{w_{k+1}} \{ y_k w_k + y_{k+1} w_{k+1} \} \\ m_k &= \frac{w_k}{w_{k+1}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (83)$$

und

Dann wird

$$v + B_k \rho + C_k \zeta = m_k \dots \dots \dots (84)$$

Diese Gleichung lässt sich in eben derselben Weise, wie die Gleichung (76), behandeln.

$m_k$  ist von der etwaigen Lage der Nulllinie völlig unabhängig. Wenn aber in den Ausdrücken für  $B_k$  und  $C_k$ , ausser  $w_k$  und  $w_{k+1}$ , noch die absoluten Werte der Ordinaten selbst  $y_k$ ,  $y_{k+1}$  und  $y_{k+2}$  auftreten, so ist dies von keiner Bedeutung, da  $B_k$  und  $C_k$  nur als Koeffizienten bei zwei kleinen Grössen  $\rho$  und  $\zeta$  auftreten und folglich ein etwaiger kleiner Fehler in den Werten von  $B_k$  und  $C_k$  von keinem Belang ist.

Auf Grund der Formel (84) bestimmt man zuerst die Werte der Reibungskonstanten  $\rho$  und  $\xi$ .

Alsdann schaltet man die Dämpfung ein und bestimmt in der früher angegebenen Weise den entsprechenden Wert von  $v$ . Dazu sind nur drei Ordinaten  $y_1$ ,  $y_2$  und  $y_3$  nötig.

Diese verallgemeinerte Theorie der mechanischen Registrierung wurde im Physikalischen Laboratorium der Akademie der Wissenschaften zu St.-Petersburg einer experimentellen Prüfung unterzogen. Dazu wurde das früher erwähnte 110 Kilogramm schwere Horizontalpendel mit Vergrösserungsvorrichtung verwendet.

Ich werde einige Beobachtungsergebnisse hier anführen.

Unter Benutzung der Formeln der elementaren Theorie, ohne Berücksichtigung des Gliedes mit  $\xi$ , ergaben sich beispielsweise folgende Werte von  $\rho$  und  $v$ <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Diese Zahlen sind in meinem Aufsatz: «Über ein neues schweres Horizontalpendel mit mechanischer Registrierung für seismische Stationen zweiten Ranges» (l. c.) schon früher angeführt worden.

$y_k$	$\rho$
49 <sup>m</sup> / <sub>m</sub>	1,3 <sup>m</sup> / <sub>m</sub>
25	0,5
12	0,3
6	0,2

$w_k$	$v$	$r_k$
154,9 <sup>m</sup> / <sub>m</sub>		1,91
81,2	1,82	2,00
40,7	1,93	2,07
19,7	1,96	2,19
9,0	2,06	2,37
3,8		

Wir sehen also, dass mit Verkleinerung von  $y_k$   $\rho$  stetig abnimmt.

Ebenfalls bleibt das Dämpfungsverhältnis  $v$ , wenn es auch *unter Berücksichtigung* der Reibungskonstante  $\rho$  abgeleitet wurde, nicht konstant, sondern nimmt mit abnehmendem  $y_k$  stetig zu.

Um nun die verallgemeinerte Theorie zu prüfen, wurde bei relativ schwacher Dämpfung eine Anzahl Kurven der Eigenbewegung des Pendels aufgenommen und aus diesen  $v$ ,  $\rho$  und  $\zeta$  und ihre mittleren Fehler nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet. Die Grösse dieser mittleren Fehler liefert ein sehr gutes Kriterium zur Beurteilung, inwieweit  $v$  und  $\rho$  unter Heranziehung der zweiten Reibungskonstante  $\zeta$  sich wirklich als konstant ergeben.

Im Folgenden werde ich einige Beispiele anführen und mich dabei mit der Angabe der ersten und zwei letzten Ordinaten begnügen.

*I-te Kurve.*

$k$	$y_k$	$r_k$
1	39,75 <sup>m</sup> / <sub>m</sub>	1,230
.....		
9	5,55	1,405
10	3,95	

 $\Delta v_k = 0,175.$ 

Daraus ergibt sich

$$v = 1,248 \pm 0,013$$

$$\rho = 0,278 \pm 0,024 \text{ <sup>m</sup>/<sub>m</sub>}$$

$$\zeta = -0,000472 \pm 0,00017.$$

*II-te Kurve.*

$k$	$y_k$	$r_k$
1	51,49 <sup>m</sup> / <sub>m</sub>	1,0345
.....		
37	4,57	1,2055
38	3,79	

 $\Delta v_k = 0,1710$ 
  

$$v = 1,0429 \pm 0,0021$$

$$\rho = 0,299 \pm 0,0057 \text{ <sup>m</sup>/<sub>m</sub>}$$

$$\zeta = -0,000221 \pm 0,000026.$$

Die beiden folgenden Kurven entsprechen einer stärkeren Reibung.

*III-te Kurve.*

$k$	$y_k$	$r_k$
1	41,19 <sup>m</sup> / <sub>m</sub>	1,131
.....		
8	8,30	1,628
9	5,10	

 $\Delta v_k = 0,497$ 
  

$$v = 1,363 \pm 0,072$$

$$\rho = 0,683 \pm 0,134 \text{ <sup>m</sup>/<sub>m</sub>}$$

$$\zeta = -0,00329 \pm 0,00091.$$

*IV-te Kurve.*

$k$	$y_k$	$r_k$
1	71,28 <sup>m</sup> / <sub>m</sub>	1,086
.....		
14	8,60	1,849
15	4,65	

 $\Delta v_k = 0,763$

$$v = 1,094 \pm 0,023$$

$$\rho = 1,279 \pm 0,052 \text{ m}$$

$$\zeta = -0,000359 \pm 0,00020.$$

Die hier angeführten Beispiele genügen vollkommen, um zu zeigen, dass die Berücksichtigung der zweiten Reibungskonstante  $\xi$  (resp.  $\zeta$ ) äusserst zweckmässig ist, da in diesem Falle die mittleren Fehler in den Werten von  $v$  und  $\rho$  im Allgemeinen sich als sehr klein ergeben. Folglich sind in diesem Falle  $v$  und  $\rho$  wirklich als *konstante Grössen* zu betrachten, was bei der elementaren Theorie keineswegs der Fall war.

Selbstverständlich kann die hier dargelegte Theorie der mechanischen Registrierung keineswegs als eine vollkommen strenge Theorie betrachtet werden, aber sie führt zu Resultaten, welche in sehr befriedigender Übereinstimmung mit den Beobachtungsergebnissen stehen.

Es wäre also zu empfehlen, überall, wo die mechanische Registrierungsart verwendet wird und wo auf möglichst einwandfreie Resultate Gewicht gelegt wird, nicht eine, sondern *zwei* Reibungskonstanten in Betracht zu ziehen.

Wollen wir nun sehen, wie man von dieser Theorie bei der Auswertung von Seismogrammen zum Zweck der Bestimmung der wahren Amplituden der Bodenbewegung während der Hauptphase eines Bebens unter Voraussetzung reiner harmonischer Erdbebenwellen Gebrauch machen muss.

Bezeichnen wir die betreffende Komponente der Bodenbewegung mit  $x$ , so können wir für eine harmonische Welle setzen

$$x = x_m \sin(pt + \delta), \dots\dots\dots (85)$$

wo

$$p = \frac{2\pi}{T_p} \dots\dots\dots (86)$$

ist.

$T_p$  ist die Wellenperiode,  $x_m$  die gesuchte maximale Amplitude der Bodenbewegung und  $\delta$  die anfängliche Phase, welche keine weitere praktische Bedeutung hat.

Wenn der betreffende Seismograph genügend stark gedämpft ist, so lässt sich die Wellenperiode  $T_p$  aus dem entsprechenden Seismogramm sofort entnehmen.

Die Aufgabe besteht darin, die wahre Amplitude  $x_m$  und den entsprechenden Moment  $t_{x_m}$  der wahren *Bodenbewegung* zu finden und zwar *unter Berücksichtigung* der beiden Reibungskonstanten  $\rho$  und  $\xi$ .

Dazu kehren wir zu der allgemeinen Grunddifferentialgleichung (39) zurück und wollen wir jetzt bei  $\epsilon_1$  und  $n_1$  den Index 1 fallen lassen.

Demgemäss haben wir

$$y'' + 2\epsilon y' + n^2(y + \rho_0) + \xi\{y' + \nu y\}^2 + \mathfrak{B}_0 x'' = 0 \dots\dots (87)$$

In dieser Gleichung sind die verschiedenen Konstanten  $\epsilon$ ,  $n$ ,  $\rho_0$  (resp.  $\rho$ ),  $\xi$ ,  $\nu$ ,  $\mathfrak{B}_0$ , so wie auch die Eigenperiode des Pendels ohne Dämpfung

$$T = \frac{2\pi}{n} \dots\dots\dots (88)$$

und die Dämpfungskonstante

$$\mu^2 = 1 - \frac{\epsilon^2}{n^2} \dots\dots\dots (89)$$

als bekannt vorauszusetzen.

Die Gleichung (87) wollen wir auch nach der Methode der sukzessiven Annäherungen behandeln.

Setzen wir dementsprechend zuerst  $\rho_0$  und  $\xi$  gleich Null.

Dann lässt sich bei Zugrundelegung der Formel (85), wenn die Dämpfung genügend stark und die Zeit  $t$  nicht zu klein ist, sodass die Glieder, welche  $e^{-\epsilon t}$  als Faktor enthalten, schon verschwindend klein geworden sind, das Integral der Gleichung (87) in folgender bekannter Form schreiben<sup>1)</sup>:

$$y = \mathfrak{B}_0 x_m \frac{1}{(1+u^2)\sqrt{1-\mu^2 f(u)}} \cdot \sin\{p(t-\tau) + \delta\} \dots\dots (90)$$

Hierin bedeuten:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{T_p}{T} \\ f(u) &= \left(\frac{2u}{1+u^2}\right)^2 \\ \tau &= \frac{T_p}{2\pi} \cdot \text{arctg} \left\{ \sqrt{1-\mu^2} \cdot \frac{2u}{u^2-1} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (91)$$

Wollen wir nun der Einfachheit halber folgende Bezeichnungen einführen:

$$A_0 = \mathfrak{B}_0 \frac{x_m}{(1+u^2)\sqrt{1-\mu^2 f(u)}} \dots\dots\dots (92)$$

und

$$\psi = pt - p\tau + \delta \dots\dots\dots (93)$$

<sup>1)</sup> Man sehe z. B. meinen Aufsatz: «Über ein neues aperiodisches Horizontalpendel mit galvanometrischer Fernregistrierung». Comptes rendus des séances de la Commission sismique permanente. T. IV. Livr. 1. § 2.

Dann wird

$$y = A_0 \sin \psi,$$

$$y' = A_0 p \cos \psi$$

und

$$y' + \nu y = A_0 \{p \cos \psi + \nu \sin \psi\}.$$

Setzen wir nun

$$\left. \begin{aligned} \sin \beta &= \frac{p}{\sqrt{p^2 + \nu^2}}, \\ \cos \beta &= \frac{\nu}{\sqrt{p^2 + \nu^2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (94)$$

und

$$A = A_0^2 (p^2 + \nu^2), \dots \dots \dots (95)$$

dann wird

$$(y' + \nu y)^2 = A \sin^2 (\psi + \beta),$$

und unsere Grunddifferentialgleichung (87) nimmt, unter Berücksichtigung der Beziehung (85), folgende Form an:

$$y'' + 2\varepsilon y' + n^2 (y + \rho_0) = \mathfrak{B}_0 p^2 x_m \sin (pt + \delta) - \xi A \sin^2 (\psi + \beta) \dots (96)$$

Die hier auftretende Variable ist  $y + \rho_0$ .

Das allgemeine Integral dieser Gleichung (96) für  $n > \varepsilon$  kann bekanntlich in folgender Form geschrieben werden:

$$y + \rho_0 = e^{-\varepsilon t} [\Gamma_1 \cos \gamma t + \Gamma_2 \sin \gamma t] + A_0 \sin \psi + \eta,$$

wo

$$\gamma = \sqrt{n^2 - \varepsilon^2}$$

und

$$\eta = \xi \frac{A}{\gamma} e^{-\varepsilon t} \left[ \cos \gamma t \cdot \int e^{\varepsilon t} \sin \gamma t \cdot \sin^2 (\psi + \beta) dt \right. \\ \left. - \sin \gamma t \cdot \int e^{\varepsilon t} \cos \gamma t \cdot \sin^2 (\psi + \beta) dt \right] \dots \dots \dots (97)$$

wird.

Wenn die Dämpfung genügend stark und  $t$  nicht zu klein ist, können wir die zwei ersten Glieder mit dem Faktor  $e^{-\varepsilon t}$  im Ausdruck von  $y + \rho_0$  einfach vernachlässigen.

Dann ergibt sich

$$y + \rho_0 = A_0 \sin \psi + \eta \dots \dots \dots (98)$$

Wollen wir nun  $\eta$  ausrechnen.

Führen wir dazu folgende Bezeichnungen ein:

$$a = \psi + \beta = pt - p\tau + \delta + \beta \dots \dots \dots (99)$$

$$b = \gamma t \dots \dots \dots (100)$$

$$S_1 = \int e^{\varepsilon t} \sin b \sin^2 a dt$$

$$S_2 = \int e^{\varepsilon t} \cos b \sin^2 a dt.$$

Dann wird

$$\eta = \xi \frac{A}{\gamma} e^{-\varepsilon t} [\cos b \cdot S_1 - \sin b \cdot S_2] \dots \dots \dots (101)$$

Weiter haben wir

$$\sin b \sin^2 a = \frac{1}{4} [2 \sin b + \sin (2a - b) - \sin (2a + b)]$$

$$\cos b \sin^2 a = \frac{1}{4} [2 \cos b - \cos (2a - b) - \cos (2a + b)].$$

Setzen wir noch

$$G = \int e^{\varepsilon t} \sin b dt$$

$$G_1 = \int e^{\varepsilon t} \sin (2a - b) dt$$

$$G_2 = \int e^{\varepsilon t} \sin (2a + b) dt$$

und

$$H = \int e^{\varepsilon t} \cos b dt$$

$$H_1 = \int e^{\varepsilon t} \cos (2a - b) dt$$

$$H_2 = \int e^{\varepsilon t} \cos (2a + b) dt,$$

dann ergibt sich

$$S_1 = \frac{1}{4} [2G + G_1 - G_2]$$

und

$$S_2 = \frac{1}{4} [2H - H_1 - H_2],$$

folglich wird nach der Gleichung (101)

$$\eta = \frac{1}{4} \xi \frac{A}{\gamma} e^{-\varepsilon t} [2 \{G \cos b - H \sin b\} + \{G_1 \cos b + H_1 \sin b\} \\ + \{-G_2 \cos b + H_2 \sin b\}]. \dots \dots (102)$$

Setzen wir noch

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= 2p - \gamma \\ q_2 &= 2p + \gamma \end{aligned} \right\}, \dots \dots \dots (103)$$

so wird

$$2a - b = q_1 t - p\tau + \delta + \beta$$

$$2a + b = q_2 t - p\tau + \delta + \beta.$$

Für die 6 eben eingeführten unbestimmten Integrale ergeben sich nun folgende Ausdrücke:

$$G = \frac{e^{\epsilon t}}{\epsilon^2 + \gamma^2} [\epsilon \sin b - \gamma \cos b]$$

$$G_1 = \frac{e^{\epsilon t}}{\epsilon^2 + q_1^2} [\epsilon \sin(2a - b) - q_1 \cos(2a - b)]$$

$$G_2 = \frac{e^{\epsilon t}}{\epsilon^2 + q_2^2} [\epsilon \sin(2a + b) - q_2 \cos(2a + b)]$$

und

$$H = \frac{e^{\epsilon t}}{\epsilon^2 + \gamma^2} [\gamma \sin b + \epsilon \cos b]$$

$$H_1 = \frac{e^{\epsilon t}}{\epsilon^2 + q_1^2} [q_1 \sin(2a - b) + \epsilon \cos(2a - b)]$$

$$H_2 = \frac{e^{\epsilon t}}{\epsilon^2 + q_2^2} [q_2 \sin(2a + b) + \epsilon \cos(2a + b)].$$

Daraus folgt, unter Berücksichtigung, dass

$$\gamma^2 + \epsilon^2 = n^2$$

ist,

$$G \cos b - H \sin b = -\frac{\gamma}{n^2} e^{\epsilon t}$$

$$G_1 \cos b + H_1 \sin b = \frac{e^{\epsilon t}}{\epsilon^2 + q_1^2} \{\epsilon \sin 2a - q_1 \cos 2a\}$$

$$- G_2 \cos b + H_2 \sin b = \frac{e^{\epsilon t}}{\epsilon^2 + q_2^2} \{-\epsilon \sin 2a + q_2 \cos 2a\}.$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die Formel (102) ein, so wird

$$\eta = -\frac{1}{2} \xi \frac{A}{n^2} + \frac{1}{4} \xi \frac{A}{\gamma} P, \dots \dots \dots (104)$$

wo

$$P = \epsilon \left\{ \frac{1}{\epsilon^2 + q_1^2} - \frac{1}{\epsilon^2 + q_2^2} \right\} \sin 2a + \left\{ \frac{-q_1}{\epsilon^2 + q_1^2} + \frac{q_2}{\epsilon^2 + q_2^2} \right\} \cos 2a$$

ist.

Dieser Ausdruck für  $P$  lässt sich leicht umformen.

Es wird nämlich

$$P = \frac{q_2 - q_1}{(\epsilon^2 + q_1^2)(\epsilon^2 + q_2^2)} [\epsilon(q_2 + q_1) \sin 2a + (\epsilon^2 - q_1 q_2) \cos 2a].$$

Nun erhält man aus den Beziehungen (103)

$$q_2 - q_1 = 2\gamma$$

$$q_2 + q_1 = 4p$$

$$q_1 q_2 = 4p^2 - \gamma^2$$

$$\epsilon^2 - q_1 q_2 = n^2 - 4p^2$$

$$(\epsilon^2 + q_1^2)(\epsilon^2 + q_2^2) = (n^2 + 4p^2)^2 - 16p^2 \gamma^2,$$

folglich wird

$$P = \frac{2\gamma}{(n^2 + 4p^2)^2 - 16p^2 \gamma^2} [4\epsilon p \sin 2a - (4p^2 - n^2) \cos 2a].$$

Setzen wir nun

$$\sin \beta_1 = \frac{4p^2 - n^2}{\sqrt{(4\epsilon p)^2 + (4p^2 - n^2)^2}}$$

$$\cos \beta_1 = \frac{4\epsilon p}{\sqrt{(4\epsilon p)^2 + (4p^2 - n^2)^2}}$$

und berücksichtigen noch dabei, dass

$$(4\epsilon p)^2 + (4p^2 - n^2)^2 = (n^2 + 4p^2)^2 - 16p^2 \gamma^2$$

ist, so ergibt sich

$$P = \frac{2\gamma}{\sqrt{(n^2 + 4p^2)^2 - 16p^2 \gamma^2}} \sin(2a - \beta_1).$$

Berücksichtigen wir noch die Beziehungen (86), (88), (4), (5) und (6), so ist

$$u = \frac{T_p}{T} = \frac{n}{p}$$

$$\gamma = n\mu$$

und

$$\epsilon = n \sqrt{1 - \mu^2}.$$

Dann werden

$$\left. \begin{aligned} \sin \beta_1 &= \frac{4-u^2}{\sqrt{(4+u^2)^2-16\mu^2 u^2}} \\ \cos \beta_1 &= \frac{4u\sqrt{1-\mu^2}}{\sqrt{(4+u^2)^2-16\mu^2 u^2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(105)$$

und

$$P = \frac{2\gamma}{p^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(4+u^2)^2-16\mu^2 u^2}} \cdot \sin(2a-\beta_1).$$

Setzen wir noch

$$\beta_2 = 2\beta - \beta_1, \dots\dots\dots(106)$$

so wird nach der Beziehung (99)

$$2a - \beta_1 = 2\psi + \beta_2.$$

Setzen wir nun diesen Wert in den Ausdruck für  $P$  und bringen denselben in die Gleichung (104) ein, so ergibt sich, unter Berücksichtigung der Beziehung (95),

$$\eta = -\frac{1}{2}\xi \frac{A_0^2 \left\{1 + \left(\frac{v}{p}\right)^2\right\}}{u^2} + \frac{1}{2}\xi \frac{A_0^2 \left\{1 + \left(\frac{v}{p}\right)^2\right\}}{\sqrt{(4+u^2)^2-16\mu^2 u^2}} \sin(2\psi + \beta_2).$$

Die hier auftretenden Koeffizienten wollen wir folgendermaassen bezeichnen:

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= \frac{A_0^2}{2u^2} \left\{1 + \left(\frac{v}{p}\right)^2\right\} \\ B_1 &= \frac{A_0^2}{2\sqrt{(4+u^2)^2-16\mu^2 u^2}} \left\{1 + \left(\frac{v}{p}\right)^2\right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(107)$$

Dann bekommt man als endgiltigen Ausdruck für  $\eta$ :

$$\eta = -\xi B_0 + \xi B_1 \sin(2\psi + \beta_2) \dots\dots\dots(108)$$

Bringen wir nun diesen Wert von  $\eta$  in die Gleichung (98) ein, so erhalten wir

$$y + (\rho_0 + B_0 \xi) = A_0 \sin \psi + \xi B_1 \sin(2\psi + \beta_2) \dots\dots\dots(109)$$

Die Werte von  $A_0$  und  $\psi$  werden dabei durch die Formeln (92) und gegeben, nämlich

$$A_0 = \mathfrak{B}_0 \frac{x_m}{(1+u^2)\sqrt{1-\mu^2 f(u)}} \dots\dots\dots(92)$$

und

$$\psi = pt - p\tau + \delta \dots\dots\dots(93)$$

Die Gleichung (109) stellt also die Bewegungsgleichung des betreffenden Seismographen für eine harmonische Erdbebenwelle, und zwar unter Berücksichtigung des Einflusses der beiden Reibungskonstanten  $\rho_0$  und  $\xi$ , dar.

Wollen wir nun den Wert der ersten maximalen Ordinate  $y_1$  aufsuchen.

Dementsprechend suchen wir die erste Wurzel der Gleichung  $\frac{dy}{dt} = 0$  oder

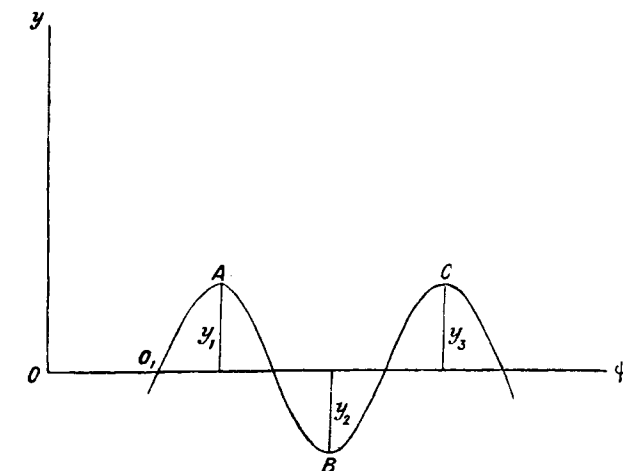
$$\frac{dy}{d\psi} = 0 \dots\dots\dots(110)$$

auf.

Fassen wir  $\psi$  als unabhängige Variable auf.

Dann wird die Kurve der Pendelbewegung etwa durch die Kurve der folgenden Figur (4) wiedergegeben.

Fig. 4



Wollen wir die erste, kleinste Wurzel der Gleichung (110) mit  $\psi_1$  bezeichnen.

Dann muss  $\psi_1$  folgender Gleichung genügen:

$$A_0 \cos \psi + 2\xi B_1 \cos(2\psi + \beta_2) = 0 \dots\dots\dots(111)$$

Die erste, angenäherte, Wurzel derselben ist  $\frac{\pi}{2}$ .

Ein genauerer Wert ergibt sich, wenn wir

$$\psi_1 = \frac{\pi}{2} + \delta_1 \xi$$

setzen, wo  $\delta_1$  eine gewisse Konstante bedeutet.

Um  $\delta_1$  zu bestimmen, setzen wir diesen Wert von  $\psi_1$  in die Gleichung (111) ein.

Dann können wir schreiben, bei Vernachlässigung von Gliedern von der Ordnung von  $\xi^2$ ,

$$-A_0 \delta_1 \xi - 2\xi B_1 \cos \beta_2 = 0$$

oder

$$\delta_1 = -2 \frac{B_1}{A_0} \cos \beta_2 \dots \dots \dots (112)$$

Aus der Gleichung (109) folgt alsdann

$$y_1 + \rho_0 + B_0 \xi = A_0 \sin \left( \frac{\pi}{2} + \delta_1 \xi \right) + \xi B_1 \sin (\pi + 2\delta_1 \xi + \beta_2)$$

oder

$$y_1 + \rho_0 + (B_0 + B_1 \sin \beta_2) \xi = A_0 \dots \dots \dots (113)$$

Da nach der Fig. 4  $y_1 > 0$  ist und da zwischen den Punkten  $O_1$  und  $A$   $\frac{dy}{dt} > 0$  wird, so tritt in der Gleichung (113)  $\rho_0$  als eine positive Grösse auf.

Wollen wir jetzt die zweite Ordinate  $y_2$  aufsuchen; der entsprechende Wert von  $\psi$  sei  $\psi_2$ .

Die zweite Wurzel der Gleichung (111) können wir folgendermaassen schreiben

$$\psi_2 = 3 \frac{\pi}{2} + \delta_2 \xi.$$

Für  $\delta_2$  findet man in derselben Weise, wie früher,

$$\delta_2 = 2 \frac{B_1}{A_0} \cos \beta_2 = -\delta_1$$

und es wird

$$y_2 + \rho_0 + (B_0 + B_1 \sin \beta_2) \xi = -A_0 \dots \dots \dots (114)$$

Diese Formel zeigt, dass  $y_2$  negativ ist.

Nun ist zwischen den Punkten  $A$  und  $B$  auf der Fig. 4  $\frac{dy}{dt} < 0$ , folglich wird in der Gleichung (114)  $\rho_0$  als negative Grösse auftreten.

Weiter ist es sehr leicht einzusehen, dass auch  $\xi$  sein Vorzeichen mit  $\rho_0$  oder  $\frac{dy}{dt}$  ändert.

Dazu kehren wir zu der Gleichung (31) zurück, welche die Reibungskraft  $f$  als Funktion der Geschwindigkeit  $V$  des Schreibstiftes auf dem berussten Papier angibt.

Nach der Formel (37) können wir für kleine Drehgeschwindigkeiten der Trommel  $V = y'$  setzen.

Dann wird

$$f = f_0 + \alpha y' + \beta y'^2.$$

Nach den Bezeichnungen (38) ist  $f_0$  proportional zu  $\rho_0$  und  $\beta$  proportional zu  $\xi$ .

Der absolute Wert der Kraft  $f$  kann, der Natur der Sache nach, nicht von der Richtung der Bewegung, also von dem Vorzeichen von  $y'$  abhängig sein.

Folglich muss unbedingt, nicht nur  $\rho_0$ , sondern auch  $\xi$  sein Vorzeichen mit  $y'$  zugleich ändern.

Es tritt also  $\xi$  in der Gleichung (114) ebenfalls als eine negative Grösse auf.

Andererseits ist auch  $y_2$  negativ.

Wollen wir aber, wie üblich, unter den verschiedenen maximalen Ordinaten immer die absoluten Werte derselben verstehen, dann müssen wir in der Formel (114), statt  $y_2$ ,  $-y_2$  einsetzen.

Dann lässt sich die Gleichung (114) folgendermaassen schreiben:

$$y_2 + \rho_0 + (B_0 + B_1 \sin \beta_2) \xi = A_0.$$

Hierin sind  $y_2$ ,  $\rho_0$  und  $\xi$  als positive Grössen aufzufassen, wie  $y_1$ ,  $\rho_0$  und  $\xi$  in der Gleichung (113).

Folglich wird auch

$$\psi_2 = 3 \frac{\pi}{2} + \delta_1 \xi,$$

wo  $\xi$  positiv ist.

Lassen wir nun der Index 0 bei  $\rho_0$  fallen, so können wir ganz allgemein für eine beliebige  $m$ -te Ordinate schreiben

$$y_m + \rho + (B_0 + B_1 \sin \beta_2) \xi = A_0 \dots \dots \dots (115)$$

und

$$\psi_m = (2m - 1) \frac{\pi}{2} + \delta_1 \xi, \dots \dots \dots (116)$$

wo  $\delta_1$  durch die Formel (112) gegeben wird.

$y_m$ ,  $\rho$  und  $\xi$  sind dabei immer als positive Grössen aufzufassen.

Bringen wir nun den Wert von  $A_0$  aus der Formel (92) in die Gleichung (115) ein und setzen wir

$$U = (1 + u^2) \sqrt{1 - \mu^2 f(u)} \dots \dots \dots (117)$$

und

$$\Delta y_m = \rho + (B_0 + B_1 \sin \beta_2) \xi, \dots \dots \dots (118)$$

so ergibt sich für die gesuchte maximale Amplitude  $x_m$  der wahren Bodenbewegung folgender sehr einfacher Ausdruck:

$$x_m = \frac{1}{\mathfrak{B}_0} \cdot U \cdot (y_m + \Delta y_m) \dots \dots \dots (119)$$

In dieser Formel bedeutet  $\mathfrak{B}_0$  das normale Vergrößerungsverhältnis für sehr rasche Schwingungen.  $U$  ist eine Grösse, welche sich aus der Tabelle V der von mir herausgegebenen «Seismometrische Tabellen» entnehmen lässt. In derselben sind die Werte von  $\log U$  gegeben für verschiedene Werte von  $u = \frac{T_p}{T_r}$  und  $\mu^2$ .

Die Formel (119) zeigt, dass, um  $x_m$  zu berechnen, zu der direkt gemessenen Ordinate der Kurve  $y_m$  eine kleine Korrektur  $\Delta y_m$  hinzugefügt werden muss.

Wollen wir dieselbe jetzt ausrechnen, so wie die Verspätung des Momentes eines Maximums auf dem Seismogramm ( $t_m$ ) in bezug auf den Moment des entsprechenden Maximums der wahren Bodenbewegung ( $t_{x_m}$ ) bestimmen.

Dazu wollen wir zuerst die Werte von  $B_0$  und  $B_1$  aus den Formeln (107) in die Gleichung (118) einsetzen.

Bevor wir es tun, wollen wir noch folgende Vereinfachung treffen.

Da die Drehgeschwindigkeit der Registriertrommel, folglich auch  $v$  immer sehr klein ist, und da  $B_0$  und  $B_1$  mit einer sehr kleinen Grösse  $\xi$  multipliziert werden, so können wir in den Formeln (107) mit vollkommen ausreichender Genauigkeit  $\left(\frac{v}{p}\right)^2$  im Vergleich zu 1 vernachlässigen.

Dann ergibt sich, bis auf Glieder höherer Ordnung, da nach der Gleichung (115)  $A_0$  in erster Annäherung gleich  $y_m$  ist,

$$\Delta y_m = \rho + \frac{1}{2} y_m^2 \left\{ \frac{1}{u^2} + \frac{1}{\sqrt{(4+u^2)^2 - 16\mu^2 u^2}} \sin \beta_2 \right\} \xi \dots \dots \dots (120)$$

Wollen wir nun  $\sin \beta_2$ , so wie auch  $\cos \beta_2$ , welches in dem Ausdruck von  $\delta_1$  (siehe die Formeln (112) und (116)) vorkommt, ausrechnen.

Auf Grund der Bezeichnung (106) wird

$$\sin \beta_2 = \sin 2\beta \cos \beta_1 - \cos 2\beta \sin \beta_1$$

$$\cos \beta_2 = \cos 2\beta \cos \beta_1 + \sin 2\beta \sin \beta_1.$$

Da  $\sin \beta_2$  und  $\cos \beta_2$  mit der sehr kleinen Grösse  $\xi$  multipliziert werden, so kann mit ausreichender Genauigkeit in den Formeln (94)  $\frac{v}{p}$  gleich Null gesetzt werden.

Dann wird

$$\sin \beta = 1$$

und

$$\cos \beta = 0,$$

also

$$\beta = \frac{\pi}{2}$$

und

$$2\beta = \pi.$$

Dann ergibt sich auf Grund der Beziehungen (105)

$$\sin \beta_2 = \frac{4 - u^2}{\sqrt{(4 + u^2)^2 - 16\mu^2 u^2}} \dots \dots \dots (121)$$

und

$$\cos \beta_2 = -\frac{4u\sqrt{1 - \mu^2}}{\sqrt{(4 + u^2)^2 - 16\mu^2 u^2}} \dots \dots \dots (122)$$

Bringen wir nun den Ausdruck für  $\sin \beta_2$  aus der Formel (121) in die Gleichung (120) ein und setzen wir

$$F(u) = 2 \frac{4 + (3 - 4\mu^2) u^2}{u^2 \sqrt{(4 + u^2)^2 - 16\mu^2 u^2}}, \dots \dots \dots (123)$$

so wird

$$\Delta y_m = \rho + y_m^2 \cdot F(u) \xi \dots \dots \dots (124)$$

Nach diesen Formeln (123) und (124) lässt sich die gesuchte Korrektur  $\Delta y_m$  sehr leicht bestimmen.

Wollen wir nun die Zeitverspätung in dem Eintreffen des Maximums auf dem Seismogramm berechnen.

Aus der Gleichung (85)

$$x = x_m \sin(pt + \delta)$$

folgt, dass das erste Maximum der wahren Bodenbewegung eintritt, wenn

$$p t_{x_1} + \delta = \frac{\pi}{2},$$

das zweite Maximum, wenn

$$p t_{x_2} + \delta = 3 \frac{\pi}{2},$$



also das  $m$ -te Maximum, wenn

$$p t_{x_m} + \delta = (2m - 1) \frac{\pi}{2} \dots \dots \dots (125)$$

wird.

Ist  $t_m$  der Moment des entsprechenden Maximums *auf dem Seismogramm*, so ergibt sich auf Grund der Beziehungen (93) und (116)

$$p t_m - p\tau + \delta = (2m - 1) \frac{\pi}{2} + \delta_1 \zeta \dots \dots \dots (126)$$

Ziehen wir die Gleichung (125) von der Gleichung (126) ab, so folgt

$$t_m - t_{x_m} = \tau + \frac{\delta_1}{p} \zeta$$

oder, nach der Formel (86),

$$t_m - t_{x_m} = \tau + \frac{T_p}{2\pi} \cdot \delta_1 \zeta.$$

Um  $\delta_1$  zu bestimmen, setzen wir die Werte von  $B_1$  und  $\cos \beta_2$  aus den Formeln (107) und (122) in die Gleichung (112) ein, so ergibt sich mit derselben Genauigkeit, wie früher,

$$\delta_1 = y_m \cdot F_1(u), \dots \dots \dots (127)$$

wo

$$F_1(u) = \frac{4u \sqrt{1 - \mu^2}}{(4 + u^2)^2 - 16\mu^2 u^2} \dots \dots \dots (128)$$

wird.

Es ist also

$$t_{x_m} = t_m - \tau - \frac{T_p}{2\pi} \cdot y_m F_1(u) \cdot \zeta \dots \dots \dots (129)$$

Wir sehen also, dass, ausser der gewöhnlichen Zeitverspätung  $\tau$ , welche eine inhärente Eigenschaft aller Seismographen ist, noch eine weitere Zeitverspätung eintritt, die durch die Reibungskonstante  $\zeta$  bedingt ist.

$\tau$  lässt sich sehr leicht aus der Tabelle VI meiner «Seismometrische Tabellen» entnehmen. In derselben befinden sich die Werte von  $\frac{\tau}{T_p}$ ; als Argumente dienen die Werte von  $u$  und  $\mu^2$ .

Bei der mechanischen Registrierung tritt bekanntlich noch eine weitere Zeitkorrektur auf, die durch die Kreisbewegung des Schreibstiftes bedingt ist.

Bedeutet nun  $t'_m$  die Abszisse desjenigen Punktes eines Seismogrammes,

welcher einem Maximum entspricht, so muss, um den entsprechenden Moment  $t_m$  zu erhalten, von  $t'_m$  die Korrektur

$$\Delta t'_m = \frac{1}{2} \frac{y_m^2}{b\lambda}$$

abgezogen werden<sup>1)</sup>.

Hierin bedeutet  $b$  die Grösse des längeren Arms der Hebelvergrösserungsvorrichtung und  $\lambda$  die Länge einer Sekunde auf der Registriertrommel.

Somit ergibt sich für die Berechnung des Momentes des Maximums der wahren Bodenbewegung folgende definitive Formel:

$$t_{x_m} = t'_m - \frac{1}{2} \frac{y_m^2}{b\lambda} - \tau - \frac{T_p}{2\pi} \cdot y_m F_1(u) \zeta \dots \dots \dots (130)$$

Wollen wir nun die hier dargelegte Theorie durch das folgende Zahlenbeispiel erläutern.

Setzen wir voraus, dass die Beobachtungen bei schwacher Dämpfung diejenigen Werte von  $v$ ,  $\rho$  und  $\zeta$  ergeben haben, welche der früher angeführten I-ten Kurve entsprechen.

Also

$$v = 1,248$$

$$\rho = 0,28 \text{ m/m}$$

$$\zeta = -0,00047.$$

Folglich wird

$$\Lambda = \text{Lg}_{10} v = 0,0962,$$

und, nach der Tabelle IX der «Seismometrische Tabellen»,

$$\text{Lg } s = \text{Lg } \sqrt{1 + 0,53720\Lambda^2} = 0,00108.$$

Daraus ergibt sich nach der Formel (13), nach welcher

$$\mu^2 = \frac{1}{1 + 0,53720\Lambda^2}$$

wird,

$$\mu^2 = 0,9950.$$

Weiter erhält man nach der Formel (77)

$$\mathfrak{A} = -\frac{6}{1 + 8\mu^2} = -0,670,$$

<sup>1)</sup> Siehe z. B. «Über ein neues schweres Horizontalpendel mit mechanischer Registrierung für seismische Stationen zweiten Ranges». I. c. § 5.

also nach der Formel (82)

$$\xi = \frac{\zeta}{\mu} = 0,00070.$$

Setzen wir nun voraus, dass die Eigenperiode des Seismographen ohne Dämpfung  $T = 25,0$  und bei eingeschaltener Dämpfung  $\mu^2 = 0,80$  beträgt.

Diesem Wert von  $\mu^2$  entspricht nach der Tabelle I der «Seismometrische Tabellen» ein Dämpfungsverhältnis  $v = 4,81$ .

Es sei weiter  $b = 30$  cm. und  $\lambda = 0,5$  m/m.

Aus dem Seismogramm sei z. B. entnommen

$$T_p = 25,0 \quad \text{und} \quad y_m = 80 \text{ m/m}.$$

Dann wird  $u = 1$ .

Mit diesen Werten von  $u$  und  $\mu^2$  findet man nach den Formeln (123) und (128)

$$F(u) = 0,623$$

und

$$F_1(u) = 0,147.$$

Es ergibt sich also in diesem Fall auf Grund der Beziehung (124)

$$\Delta y_m = \rho + y_m^2 F(u) \cdot \xi = 0,28 + 2,79 = 3,07 \text{ m/m}.$$

Die durch die Reibungskonstante  $\xi$  bedingte Korrektur ist also keineswegs zu vernachlässigen.

Wir sehen also, dass  $\frac{\Delta y_m}{y_m}$  3,8% beträgt.

Bei kleinen Werten von  $y_m$  hat die Korrektur für  $\xi$  weniger Bedeutung, aber es tritt dann der Einfluss von  $\rho$  relativ mehr zur Geltung.

Zum Beispiel, für  $y_m = 10$  m/m, wird

$$\Delta y_m = 0,28 + 0,04 = 0,32 \text{ m/m}$$

und

$$\frac{\Delta y_m}{y_m} = 3,2 \text{ } \%$$

Wollen wir nun noch die totale Zeitverspätung  $t'_m - t_{x_m}$  berechnen.

Für  $y_m = 80$  m/m beträgt die Zeitverspätung für die Kreisbewegung des Schreibstiftes

$$\Delta t'_m = \frac{1}{2} \frac{y_m^2}{b\lambda} = 21,33.$$

Aus der Tabelle VI der «Seismometrische Tabellen» findet man, für  $u = 1$  und  $\mu^2 = 0,80$ ,  $\frac{\tau}{T_p} = 0,250$ , also

$$\tau = 6,25.$$

Die dritte Korrektur für die Reibung wird

$$\frac{T_p}{2\pi} \cdot y_m F_1(u) \xi = 0,03.$$

Also beträgt die totale Zeitverspätung

$$t'_m - t_{x_m} = 27,61.$$

Die Zeitverspätung, die durch die Reibung bedingt ist, ist so klein, dass sie einfach vernachlässigt werden darf.

Als Endresultat genügt es  $t_{x_m}$  bis auf eine Sekunde genau anzugeben.

Diese ganze Untersuchung hat uns also gezeigt, dass es, um eine bessere Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung zu erhalten, notwendig ist, zwei Reibungskonstanten in Betracht zu ziehen. Dieselben sind nicht nur dazu nötig, um einen genaueren und zugleich konstanten Wert des wahren Dämpfungsverhältnisses zu gewinnen, sondern sie müssen auch bei der Auswertung von Seismogrammen zum Zweck der Bestimmung der maximalen Amplituden der wahren Bodenbewegung ebenfalls in Betracht gezogen werden.

Dadurch wird man sicherlich genauere Resultate erzielen können.

